Lietuvos matematikos rinkinys. LMD darbai
51 tomas, 2010, 238–243

ISSN 0132-2818
www.mii.lt/LMR/

Reaktoriaus modelis su vėlavimu dėl konvekcijos

Donatas Švitra, Kostas Bučys

Klaipėdos universitetas
H. Manto g. 84, LT-92294 Klaipėda
E. paštas: donatas@ik.ku.lt; bucysk@one.lt

Santrauka. Išnagrinėtas branduolinio reaktoriaus modelis, kurį sudaro dviejų diferencialinių lygčių su vėlavimu sistema. Atlikta tiesinė analizė, nustatytos modelio asimptotinio stabilumo sritis ir sritis, kurioje atsiranda vieno dažnio stabilus periodinis sprendinys. Bifurkacijų teorijos pagalba pateikta šio sprendinio analizinė išraiška.

Raktiniai žodžiai: branduolinis reaktorius, diferencialinė lygtis, vėlavimas, stabilus sprendinys, periodinis sprendinys, modelis, šaknis.

Įvadas

Branduolinių reaktorių darbo stacionarių režimų stabilumas yra tokia charakteristika, kuri apibrėžia reaktoriaus darbingumą ir galimybę jį normaliai eksploatuoti [3]. Todėl šiai problemai skiriamas didelis dėmesys. Branduoliniai reaktoriai, apskritai kalbant, yra objektai su pasiskirsčiusiais parametrais, todėl pakankamai griežti jų matematiniai modeliai aprašomi netiesinėmis diferencialinėmis lygtimis dalinėmis išvestinėmis arba prie tam tikrų papildomų supaprastinimų – lygtimis su vėluojančiu argumentu [2]. Stabilumo ir autosvyravimų sistemose su pasiskirsčiusiais parametrais ir sistemose su vėlavimu bifurkacijų teorija išvystyta monografijoje [4].

1 Branduolinio reaktoriaus dinamikos modelis

Nagrinėsime reaktoriaus dinamikos taškinį modelį, kuriame neatsižvelgiama į vėluojančių neutronų įtaką, tačiau atsižvelgiama į galios ir temperatūrinį reaktyvumo koeficientus ir į vėlavimą kintant reaktyvumui dėl šilumos konvekcijos. Šį modelį sudaro diferencialinių lygčių su vėlavimu sistema:

$$\begin{cases} \dot{N}(t) = \{-AT(t-h) - B[N(t) - N_0]\}, \\ \dot{T}(t) = k[N(t) - N_0 - T(t)]. \end{cases} \tag{1}$$

Čia $N(t)$ – reaktoriaus galia; N_0 – jos stacionari reikšmė; $T(t)$ – temperatūros nuokrypis nuo stacionarios reikšmės; A – temperatūrinis reaktyvumo koeficientas; B – galios koeficientas; k – teigiama konstanta; h – pastovus laiko vėlavimas; t – laikas. Nenusižengdami bendrumui toliau laikysime $k = 1$, $h = 1$.

2 Tiesinė analizė

Nagrinėsime stacionariojo sprendinio

$$T(t) = 0, \qquad N(t) = N_0 \tag{2}$$

stabilumą. Tuo tikslu pasinaudosime D-skaidinio metodu [1]. Sistemoje (1) atlikę keitinį

$$x(t) = T(t), \qquad y(t) = N(t) - N_0, \tag{3}$$

gausime diferencialinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = (-Ax(t-1) - By)(y + N_0), \\ \dot{x}(t) = y - x, \end{cases} \tag{4}$$

kurios tiesinė dalis yra diferencialinių lygčių sistema

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = (-Ax(t-1) - By) \cdot N_0, \\ \dot{x}(t) = y - x. \end{cases} \tag{5}$$

Pažymėkime $a = AN_0$, $b = BN_0$. Tada sistemos (5) charakteringasis kvazipolinomas

$$P(\lambda) = \lambda^2 + (1+b)\lambda + ae^{-\lambda} + b \tag{6}$$

turi nulinę šaknį $\lambda = 0$, kai

$$a + b = 0. \tag{7}$$

Ši tiesė yra viena iš linijų, sudarančių D-skaidinį. Tarkime, kad (6) kvazipolinomas turi grynai menamą šaknį $\lambda = i\sigma$. Įstatę $\lambda = i\sigma$ į (6) lygtį ir atskyrę realiąją ir menamąją dalis, gausime likusių D-skaidinio kreivių parametrines lygtis

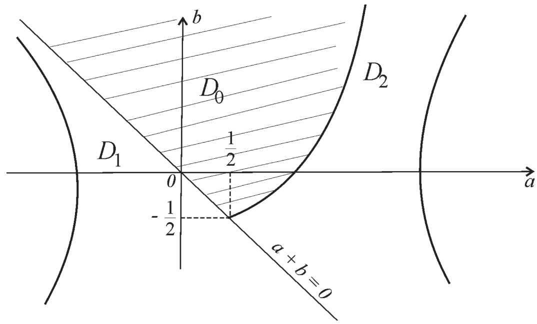
$$a = \frac{(\sigma^2 + 1)\sigma}{\sigma\cos\sigma + \sin\sigma}, \qquad b = \frac{\sigma(\sigma\sin\sigma - \cos\sigma)}{\sigma\cos\sigma + \sin\sigma}. \tag{8}$$

Formulių (7) ir (8) analizė leidžia nustatyti, kai $\sigma \to 0$ gauname grįžtamąjį tašką $(0,5; -0,5)$. Be to iš (8) sistemos antrosios lygties išplaukia, kad $b = 0$, kai $\sigma\sin\sigma - \cos\sigma = 0$, $\sigma \neq 0$. Iš čia gauname lygtį

$$\sigma = \mathrm{ctg}\sigma, \qquad \sigma \neq \pi k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{9}$$

Lygtis (9) galioja tik kai $\sigma \in (\pi k; \pi/2 + \pi k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots.$ Tiesioginiu skaičiavimu nustatome, kad (9) teisinga esant $\sigma \in (0; \pi/2]$, kai $\sigma \approx 0,86$ radianų, tuomet $a \approx 1,13$.

Pasinaudoję funkcijų $\sin\sigma$ ir $\cos\sigma$ periodiškumu ir atsižvelgę į (9) sąlygas, nustatome D-skaidinio kreives. D-skaidinys parametrų a ir b plokštumoje pavaizduotas 1 pav.



1 pav. D-skaidinys.

3 Netiesinė analizė

Nagrinėsime (1) netiesinių lygčių sistemą, kai $a = a_0 + \varepsilon$. Panaudoję (3) keitinį, minėtą sistemą pakeisime viena antrosios eilės diferencialine lygtimi su vėlavimu:

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t) &+ (1+b)\dot{x}(t) + bx(t) + (a_0+\varepsilon)x(t-1) \\ &= \gamma_1 x(t-1)(\dot{x}(t) + x(t)) + \gamma_2(\dot{x}(t) + 2x(t)\dot{x}(t) + x^2(t)), \\ &\qquad \gamma_1 = -A, \qquad \gamma_2 = -B.\end{aligned} \tag{10}$$

Sakykime, kad

$$x(\tau,\xi) = \xi\cos\sigma_0\tau + \xi^2 x_2(\tau) + \xi^3 x_3(\tau) + \ldots, \tag{11}$$

$$\varepsilon(\xi) = b_2\xi^2 + b_4\xi^4 + \cdots \equiv \Psi(\xi), \tag{12}$$

$$c(\xi) = c_2\xi^2 + c_4\xi^4 + \ldots. \tag{13}$$

Kadangi $\tau_0' > 0$, tai (10) diferencialinei lygčiai galima taikyti diferencialinių lygčių su vėlavimu sprendinio sudarymo metodiką [4]. Remiantis ja, (10) lygtyje keitiniu $t = (1+c)\tau(|c| < 1)$ normuojame laiką ir įrašome (11)–(13) eilutes. Tuomet (10) diferencialinė lygtis taps formalia tapatybe

$$\begin{aligned}x''(\tau,\xi) &+ (1+c)(1+b)x'(\tau,\xi) + (a_0+\varepsilon)(1+c)^2 x\left(\tau - \frac{1}{1+c},\xi\right) \\ &+ (1+c)^2 x(\tau,\xi) + b(1+c)x'(\tau,\xi) \\ &\equiv \gamma_1\left((1+c)x'(\tau,\xi)x\left(\tau - \frac{1}{1+c},\xi\right) + (1+c)^2 x(\tau,\xi)x\left(\tau - \frac{1}{1+c},\xi\right)\right) \\ &+ \gamma_2\big(x'^2(\tau,\xi) + (1+c)^2 x^2(\tau,\xi) + 2(1+c)x(\tau,\xi)x'(\tau,\xi)\big).\end{aligned} \tag{14}$$

Gautos tapatybės kairiąją ir dešiniąją puses išdėstę ξ laipsniais ir prilyginę koeficientus prie vienodų ξ laipsnių, gausime diferencialines lygtis, kurios atlikus atitinkamus pertvarkius yra:

$$
\begin{aligned}
&x_2''(\tau) + (1+b)x_2'(\tau) + a_0 x_2(\tau-1) + b x_2(\tau)\\
&\quad = \frac{\gamma_1}{2}(\cos\sigma_0 - \sigma_0\sin\sigma_0) + \frac{\gamma_2}{2}\sigma_0^2\\
&\qquad - \left(\frac{\sigma_0\cdot\gamma_1}{2}\cos\sigma_0 - \frac{\gamma_2\cdot\sigma_0}{2}\sin\sigma_0 + \gamma_2\right)\sin 2\sigma_0\tau\\
&\qquad + 0,5(\gamma_1\sin\sigma_0 + \gamma_1\cos\sigma_0 - \gamma_2\sigma_0^2)\cos 2\sigma_0\tau, \qquad (15)\\
&x_3''(\tau) + (1+b)x_3(\tau) + a_0 x_3(\tau-1) + b x_3(\tau)\\
&\quad = \sigma_0\sin\sigma_0\tau - b_2(\cos\sigma_0\tau\cos\sigma_0 + \sin\sigma_0\tau\sin\sigma_0)\\
&\qquad - c_2\bigl(2a_0\cos\sigma_0(\tau-1) - a_0\sigma_0\sin\sigma_0(\tau-1) + 2b\cos\sigma_0\tau - b\sigma_0\sin\sigma_0\tau\bigr)\\
&\qquad + x_2'(\tau)\bigl(\gamma_1\cos\sigma_0(\tau-1) + 2\gamma_2\sigma_0\sin\sigma_0\tau - 2\gamma_2\cos\sigma_0\tau\bigr)\\
&\qquad + x_2(\tau)\bigl(\gamma_1\cos\sigma_0(\tau-1) + 2\gamma_2\cos\sigma_0\tau + 2\gamma_2\sigma_0\sin\sigma_0\tau\bigr)\\
&\qquad + x_2(\tau-1)(\gamma_1\cos\sigma_0\tau - \gamma_1\sigma_0\sin\sigma_0\tau). \qquad (16)
\end{aligned}
$$

(15) lygtis yra antros eilės tiesinė nehomogeninė diferencialinė lygtis su pastoviais koeficientais. Todėl jos sprendinio ieškosime pavidalo

$$x_2(\tau) = A_0 + A_{2S}\sin 2\sigma_0\tau + A_{2C}\cos 2\sigma_0\tau. \qquad (17)$$

Įstatę (17) sprendinį į (15) lygtį, gauname

$$
\begin{gathered}
A_0 = \frac{1}{2(a_0+b)}\cdot\bigl(\gamma_1(\cos\sigma_0 - \sigma_0\sin\sigma_0) + \gamma_2\sigma_0^2\bigr),\\
A_{2S} = (MI - NR)/\bigl|P_0(2i\sigma_0)\bigr|^2, \qquad A_{2C} = (NI - MR)/\bigl|P_0(2i\sigma_0)\bigr|^2,
\end{gathered}
$$

čia

$$
\begin{gathered}
M = 0,5\gamma_1\sin\sigma_0 - 0,5\gamma_1\cos\sigma_0 - \gamma_2, \qquad N = 0,5\bigl(\gamma_1\sigma_0\sin\sigma_0 + \gamma_1\cos\sigma_0 - \gamma_2\sigma_0^2\bigr),\\
I = \operatorname{Im} P_0(2i\sigma_0), \qquad R = \operatorname{Re} P_0(2i\sigma_0), \qquad P_0(2i\sigma_0) \equiv P\bigl(\lambda(\varepsilon)\bigr)\Big|_{\substack{\varepsilon=0,\\ \lambda=2i\sigma_0}}.
\end{gathered}
$$

Iš Fredholmo alternatyvos išplaukia [4, 1], kad (16) diferencialinė lygtis turi periodinį sprendinį tada ir tik tada, kai patenkintos lygybės

$$\frac{\sigma_0}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\sigma_0}} f_3(\tau)\sin\sigma_0\tau\,d\tau = 0, \qquad \frac{\sigma_0}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\sigma_0}} f_3(\tau)\cos\sigma_0\tau\,d\tau = 0, \qquad (18)$$

čia $f_3(\tau)$ lygi (16) lygties dešiniajai pusei.

Iš (18) sąlygų gauname dviejų tiesinių lygčių sistemą kintamųjų b_2 ir c_2 atžvilgiu:

$$
\begin{cases}
-b_2\sin\sigma_0 + c_2(a_0\sigma_0\cos\sigma_0 - 2a_0\sin\sigma_0 + b\sigma_0) = Q_1,\\
-b_2\cos\sigma_0 - c_2(2a_0\cos\sigma_0 + a_0\sigma_0\sin\sigma_0 + 2b) = Q_2,
\end{cases} \qquad (19)
$$

čia

$$\begin{aligned} Q_1 &= \gamma_2 K + \sigma_0(1 + 2K\gamma_2\sigma_0 - 2K_1\gamma_2 + 2A_0\gamma_2 - K_1\gamma_2 - A_0\gamma_1) \\ &\quad + \gamma_1(A_0 - \sigma_0 K - 0,5K_1)\sin\sigma_0 + \gamma_1(0,5K - \sigma_0 K_1)\cos\sigma_0 \\ &\quad + 0,5\gamma_1(K_1 - \sigma_0 K)\sin 2\sigma_0\tau + 0,5\gamma_1(K_1\sigma_0 + K)\cos 2\sigma_0\tau, \\ Q_2 &= \gamma_1(A_0 - K) + \gamma_2(2K_1\sigma_0^2 + 3\sigma_0 K + K_1 + A_0) \\ &\quad + \gamma_1(0,5K - K_1\sigma_0)\sin\sigma_0 + \gamma_1(K\sigma_0 + A_0 + 0,5K)\cos\sigma_0 \\ &\quad + 0,5\gamma_1(K - K_1\sigma_0)\sin 2\sigma_0 + 0,5\gamma_1(K_1 - K\sigma_0)\cos 2\sigma_0, \\ &\qquad K = MI - NR, \qquad K_1 = NI - MR. \end{aligned}$$

Iš (19) sistemos gauname

$$b_2 = \frac{\Delta_{b_2}}{\Delta}, \qquad c_2 = \frac{\Delta_{c_2}}{\Delta}.$$

Pagal 1.1 teoremą [4], egzistuoja vienintelis (11)–(13) funkcijų rinkinys, patenkinantis (14) tapatybę. Iš 1.1 teoremos išplaukia, kad skaliarinės lygties $\varepsilon = \psi(\xi)$ kiekvieną sprendinį $\xi = \xi(\varepsilon)$ atitinka diferencialinės lygties periodinis sprendinys

$$x(t, \varepsilon) = x(\tau, \xi), \tag{20}$$

kuriame $\tau = \frac{t}{1+c(\xi)}$.

Tegul $\xi_*(\varepsilon)$, kai $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$ yra skaliarinės lygties $\varepsilon = \psi(\xi)$ šaknis, priklausanti intervalui $(0, \xi_0)$.

Laikysime, kad ε parinktas taip, kad lygtis

$$\varepsilon = \psi(\xi) \tag{21}$$

turi tik paprastas šaknis. Tada iš 1.4 teoremos [4] išplaukia, kad sukonstruotas (10) diferencialinės lygties periodinis sprendinys $x(t)$ stabilus, kai

$$\tau_0' \frac{d}{d\xi}\Psi(\xi)\Big|_{\xi=\xi_*} > 0$$

ir nestabilus, jei

$$\tau_0' \frac{d}{d\xi}\Psi(\xi)\Big|_{\xi=\xi_*} < 0.$$

1. Tegul (21) lygtyje parametras $b_2 > 0$ ir nėra mažas. Tuomet, pasinaudoję teorema apie neišreikštinę funkciją, iš (21) lygties galime rasti ξ eilutės nelyginiais laipsniais $\varepsilon^{1/2}$ pavidalu. Apytiksliai galima laikyti, kad

$$\xi_* \approx \sqrt{\frac{\varepsilon}{b_2}}$$

t.y. (12) lygybę galime užrašyti taip: $\varepsilon \approx b_2\xi_*^2$. Tokiu būdu, remiantis (20) užrašome

$$x(t, \varepsilon) \approx \xi_* \cos\sigma_0\tau + \xi_*^2 x_2(\tau).$$

Šis sprendinys stabilus, nes

$$\tau_0' \frac{d}{d\xi}\Psi(\xi)\Big|_{\xi=\xi_*} > 0.$$

2. Tegul $b_2 < 0$. Šiuo atveju (21) skaliarinė lygtis sprendinių neturės, o tai reiškia, kad (10) diferencialinė lygtis neturės periodinių sprendinių. Ji turės sprendinius, kurie su laiku paliks nulio aplinką, kadangi

$$\tau_0'\big(\varepsilon - \Psi(\xi)\big) > 0.$$

Taigi, kai $b_2 > 0$ gauname (10) lygties, o tuo pačiu (1) sistemos periodinį sprendinį

$$x(t,\varepsilon) \approx \xi_* \cos\sigma_0\tau + \xi_*^2 x_2(\tau), \tag{22}$$

čia

$$\xi_* \approx \sqrt{\frac{\varepsilon}{b_2}}, \qquad \tau = \frac{t}{1 + c(\xi)},$$

o σ_0, ε, $c(\xi)$, $x_2(\tau)$ apibrėžiami atitinkamai (10)–(13), (17) lygybėmis.

4 Išvados

Ištirtas reaktoriaus matematinis modelis, kuris aprašytas dviejų diferencialinių lygčių su vėlavimu sistema. Tiesinė analizė atlikta D-skaidymo metodu, kurios metu nustatytos (1) modelio asimptotinio stabilumo sritis D_0 ir sritis D_2, kurioje atsiranda vieno dažnio stabilus periodinis sprendinys. Netiesinė modelio analizė atlikta bifurkacijų teorijos pagalba ir srityje D_2 sukonstruota artutinio stabilaus periodinio sprendinio analizinė išraiška.

Literatūra

[1] Л.Э. Эльсгольц, С.Б. Норкин. *Динамика физиологических систем.* Наука, Москва, 1971.

[2] В.Д. Горяченко, С.Л. Золотарев, В.А. Колчин. *Исследования динамики ядерных реакторов качественными методами.* Энергоатомиздат, Москва, 1988.

[3] Ф.М. Митенков. Актуальные задачи динамики энергетических реакторов, Вопросы атомной науки и техники. *Физика и техника ядерных реакторов*, **6**(19):3–5, 1981.

[4] Д.И. Швитра. *Динамика физиологических систем.* Мокслас, Вилънюс, 1979.

SUMMARY

A reactor model with delay because of convection

D. Švitra, K. Bučys

In this article a model of a nuclear reactor which is made of two differential equations with delay was analysed. There was made a linear analysis and defined the area of the asymptotic stability of the model and the area in which there appears a stable periodical solution of one frequency. The analytic form of the mentioned solution was received using the bifurcation theory.

Keywords: nuclear reactor, differential equation, delay, stable solution, periodic solution, model, root.