Liet. mat. rink. LMD darbai, **50**, 2009, 334–339

Tiesinio optimizavimo modelis pusiausvyroms trijų asmenų matriciniame lošime rasti

Sigutė VAKRINIENĖ[1], Daina SŪDŽIŪTĖ[2]
[1] Vilniaus Gedimino technikos universitetas
Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius
[2] Vilniaus universitetas
Universiteto g. 3, LT-01513 Vilnius
el. paštas: sigute@micro.lt

Santrauka. Darbe aprašomas metodas Nešo pusiausvyroms trijų asmenų matriciniame lošime rasti. Siūlomas tiesinio optimizavimo su papildomais binariaisiais kintamaisiais modelis, kurio sprendiniai yra pusiausvyros situacijos.

Raktiniai žodžiai: trijų asmenų matricinis lošimas, Nešo pusiausvyra, dalinai sveikaskaitis tiesinis programavimas.

1. Įvadas

Nors Nešo pusiausvyros egzistavimas kiekviename baigtiniame lošime įrodytas dar 1950 metais [1], tačiau suradimo problematika aktuali iki šiol. Pvz., apžvalginiame straipsnyje [2] remiamasi net 79-iomis mokslinėmis publikacijomis: tai vienos pusiausvyros (*sample equilibrium*) ir įvairių pusiausvyrų aibės smulkinių (*refinements – Pareto optimal equilibria, perfect equilibria, proper equilibria, sequential equilibria, stable sets*) egzistavimo ir apskaičiavimo klausimai.

Mūsų darbe pateiktas metodas, kuriame klasikinių netiesinių lygčių sistema pakeista tiesinių lygčių bei nelygybių sistema su papildomais binariaisiais kintamaisiais. Siūloma spręsti dalinai sveikaskaitį optimizavimo uždavinį, su paminėta apribojimų sistema, kurio sprendiniai, nepriklausomai nuo tikslo funkcijos pasirinkimo, yra pusiausvyros situacijos.

Metodas naujas, nes dideliame skaičiuje apžvelgtų straipsnių tiesiniai metodai nebuvo paminėti. Tiesiškumas yra aktualus, nes leidžia tiksliai spręsti daug didesnės apimties uždavinius nei netiesiniu atveju, kai (kalbant apie netiesines būtinas ir pakankamas sąlygas pusiausvyrai) nėra iškilumo savybės. Papildomi binarieji kintamieji naudojami tam, kad apibrėžtų reikalavimus tipo „*arba* vienas tvirtinimas teisingas, *arba* kitas“ (tokio tipo yra pagrindinė pusiausvyros sąlyga).

Straipsnyje pateikiami pavyzdžiai, kuriems pusiausvyrų buvo ieškoma naudojant tam skirtą programinę įrangą GAMBIT (2007 metų versija) [3] ir sprendžiant pateiktąjį dalinai sveikaskaitį optimizavimo uždavinį (SAS/OR procedūra LP). Siūlomas metodas suranda tas pusiausvyras, kurių nesuranda abu GAMBIT programinės įrangos siūlomi algoritmai, kurie remiasi netiesiniais apribojimais.

2. Nešo pusiausvyra

Trijų asmenų matricinio lošimo išlošius apibrėžia matricos:

$$A_i = \|a_{ijk}\|, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$
$$B_j = \|b_{ijk}\|, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$
$$C_k = \|c_{ijk}\|, \quad k = 1, 2, \ldots, p.$$

Jei lošėjai renkasi grynąsias strategijas i, j ir k, pirmojo išlošis yra a_{ijk}, antrojo – b_{ijk} ir trečiojo – c_{ijk}.

Pažymėkime matricas stulpelius

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdots \\ z_p \end{pmatrix}.$$

Apibrėžkime mišrių strategijų aibes:

pirmojo lošėjo $\quad X = \left\{ x / \sum_{i=1}^{m} x_i = 1,\ x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, m \right\},$

antrojo lošėjo $\quad Y = \left\{ y / \sum_{j=1}^{n} y_j = 1,\ y_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, \ldots, n \right\},$

ir trečiojo lošėjo $\quad Z = \left\{ z / \sum_{k=1}^{p} z_k = 1,\ z_k \geqslant 0,\ k = 1, 2, \ldots, p \right\}.$

Pažymėkime matricas eilutes:

$$y^T A z = \left(y^T A_1 z,\ y^T A_2 z, \ldots, y^T A_m z\right),$$
$$x^T B z = \left(x^T B_1 z,\ x^T B_2 z, \ldots, x^T B_n z\right) \quad \text{ir}$$
$$x^T C y = \left(x^T C_1 y,\ x^T C_2 y, \ldots, x^T C_p y\right).$$

Gauname išlošius mišrių strategijų situacijoje (x, y, z):
pirmojo lošėjo $u = (y^T A z) x$,
antrojo lošėjo $v = (x^T B z) y$ ir
trečiojo lošėjo $w = (x^T C y) z$.

Nešo pusiausvyros apibrėžimas

Rinkinys $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ vadinamas pusiausvyra, jei teisingos nelygybės:

$$\bar{u} = \left(\bar{y}^T A \bar{z}\right)\bar{x} \geqslant \left(\bar{y}^T A \bar{z}\right) x \quad \text{visiems } x \in X,$$
$$\bar{v} = \left(\bar{x}^T B \bar{z}\right)\bar{y} \geqslant \left(\bar{x}^T B \bar{z}\right) y \quad \text{visiems } y \in Y,$$
$$\bar{w} = \left(\bar{x}^T C \bar{y}\right)\bar{z} \geqslant \left(\bar{x}^T C \bar{y}\right) z \quad \text{visiems } z \in Z.$$

Klasikinės būtinos ir pakankamos sąlygos

Rinkinys $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ yra Nešo pusiausvyra tada ir tik tada, jei jis yra sistemos

$$\begin{cases} y^T A_i z \leqslant u, & \left(y^T A_i z - u\right)x = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \\ x^T B_j z \leqslant v, & \left(x^T B_j z - v\right)y = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \\ x^T C_k y \leqslant w, & \left(x^T C_k y - w\right)z = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, p, \end{cases}$$

sprendinys.

TEOREMA. *Jei rinkinio* $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \overline{u_{j0}}, \overline{u_{0k}}, \overline{v_{i0}}, \overline{v_{0k}}, \overline{w_{i0}}, \overline{w_{0j}})$ *komponentės visiems* $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots, p$ *tenkina tiesines lygtis ir nelygybes*

$$\sum_{k=1}^{p} a_{ijk} z_k \leqslant u_{j0}, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ijk} y_j \leqslant u_{0k}, \quad \sum_{k=1}^{p} b_{ijk} z_k \leqslant v_{i0},$$
$$\sum_{i=1}^{m} b_{ijk} x_i \leqslant v_{0k}, \quad \sum_{j=1}^{n} c_{ijk} y_j \leqslant w_{i0}, \quad \sum_{i=1}^{m} c_{ijk} x_i \leqslant w_{0j},$$

$$u_{j0} - \sum_{k=1}^{p} a_{ijk} z_k \leqslant \mu r_{ij0}, \quad u_{0k} - \sum_{j=1}^{n} a_{ijk} y_j \leqslant \mu r_{i0k}, \quad v_{i0} - \sum_{k=1}^{p} b_{ijk} z_k \leqslant \mu s_{ij0},$$
$$v_{0k} - \sum_{i=1}^{m} b_{ijk} x_i \leqslant \mu s_{0jk}, \quad w_{i0} - \sum_{j=1}^{n} c_{ijk} y_j \leqslant \mu t_{i0k}, \quad w_{0j} - \sum_{i=1}^{m} c_{ijk} x_i \leqslant \mu t_{0jk},$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \quad 0 \leqslant x_i \leqslant \mu r_i, \quad x_i + s_j + t_k + r_{ij0} + r_{i0k} \leqslant 4,$$
$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1, \quad 0 \leqslant y_j \leqslant \mu s_j, \quad y_j + r_i + t_k + s_{ij0} + s_{0jk} \leqslant 4,$$
$$\sum_{k=1}^{p} z_k = 1, \quad 0 \leqslant z_k \leqslant \mu t_k, \quad z_k + r_i + s_j + t_{i0k} + t_{0jk} \leqslant 4,$$

čia kintamieji r_i, s_j, t_k, r_{ij0}, r_{i0k}, s_{0jk}, s_{ij0}, t_{i0k}, $t_{0jk} \in \{0, 1\}$ *(binarieji kintamieji) visiems* $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots, p$, *konstanta* $\mu = \max\{\max\{a_{ij}\}, \max\{b_{ij}\}, \max\{c_{ij}\}\}$, *tai rinkinys* $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ *yra trijų asmenų lošimo pusiausvyra, kur išlošiai apskaičiuojami pagal formules*

$$\overline{u} = \min\left\{\sum_{j=1}^{n} \overline{u_{j0}}\,\overline{y_j}, \sum_{k=1}^{p} \overline{u_{0k}}\,\overline{z_k}\right\}, \quad \overline{v} = \min\left\{\sum_{k=1}^{p} \overline{v_{0k}}\,\overline{z_k}, \sum_{i=1}^{m} \overline{v_{i0}}\,\overline{x_i}\right\},$$
$$\overline{w} = \min\left\{\sum_{j=1}^{n} \overline{w_{0j}}\,\overline{y_j}, \sum_{i=1}^{m} \overline{w_{i0}}\,\overline{x_i}\right\}.$$

Įrodymas. Tegul $x_i > 0$. Jei strategijų x, y, z komponentės tenkina sąlygas $x_i + s_j + t_k + r_{ij0} + r_{i0k} \leqslant 4$, $y_j + r_i + t_k + s_{ij0} + s_{0jk} \leqslant 4$, $z_k + r_i + s_j + t_{i0k} + t_{0jk} \leqslant 4$ visiems $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots, p$, tai

- arba $r_{ij0} = 0$ visiems j, kuriems $y_j > 0$,
- arba $r_{i0k} = 0$ visiems k, kuriems $z_k > 0$.

Priešingu atveju, jei egzistuotu $r_{ij_00} = 1$ ir $r_{i0k_0} = 1$, kuriems $y_{j_0} > 0$ ir $z_{k_0} > 0$, tai nelygybė $x_i + s_j + t_k + r_{ij0} + r_{i0k} \leqslant 4$ nebūtų teisinga, kai $x_i > 0$, $j = j_0$, $k = k_0$, nes $s_j = 1$, kai $y_j > 0$, ir $t_k = 1$, kai $z_k > 0$.

Dabar apibrėžtumo dėlei tarkim, kad $r_{ij0} = 0$ visiems j, kuriems $y_j > 0$. Tada

$$\min\left\{\sum_{j=1}^{n} u_{j0} y_j, \sum_{k=1}^{p} u_{0k} z_k\right\} = \sum_{j=1}^{n} u_{j0} y_j = U = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} a_{ijk} z_k y_j = y^T A_i z,$$

nes $u_{j0} = \sum_{k=1}^{p} a_{ijk} z_k$, kai $r_{ij0} = 0$ visiems j, kuriems $y_j > 0$.

Analogiškai įrodome lygybes $x^T B_j z = V$, kai $y_j > 0$ ir $x^T C_k y = W$, kai $z_k > 0$.

Nelygybės $\sum_{k=1}^{p} a_{ijk} z_k \leqslant u_{j0}$ yra teisingos visiems $j = 1, 2, \ldots, n$. Padauginę šių nelygybių abi puses iš y_j ir sudėję gauname:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} a_{ijk} z_k y_j \leqslant \sum_{j=1}^{n} u_{j0} y_j = u, \text{ kai } r_{ij0} = 0 \text{ visiems } j, \text{ kuriems } y_j \geqslant 0, \quad \text{arba}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} a_{ijk} z_k y_j \leqslant \sum_{k=1}^{p} u_{0k} z_k = u, \text{ kai } r_{i0k} = 0 \text{ visiems } k, \text{ kuriems } z_k \geqslant 0,$$

nes nelygybės $\sum_{j=1}^{n} a_{ijk} y_j \leqslant u_{0k}$ yra teisingos visiems $k = 1, 2, \ldots, p$.

Analogiškai gauname nelygybes $x^T B_j z \leqslant v$, kai $y_j \geqslant 0$ ir $x^T C_k y \leqslant w$, kai $z_k \geqslant 0$.

Įrodėme, kad teoremos sąlygas tenkinantys x, y ir z tenkina klasikines būtinąsias pusiausvyros sąlygas.

Matematinis modelis vienai pusiausvyrai surasti

Kad surastume kurią nors vieną pusiausvyrą sprendžiame dalinai sveikaskaitį tiesinio programavimo uždavinį laisvai pasirinkdami tikslo funkciją (pvz., $\max x_1$) su teoremoje suformuluotais apribojimais. Norėdami surasti kitas pusiausvyras keičiame tikslo funkciją arba įvedame papildomus apribojimus (pvz., uždraudžiančius jau surastą pusiausvyrą).

3. Pavyzdžiai

Pavyzdys 1 (paimtas iš straipsnio [2]). Straipsnyje teigiama, kad šis lošimas turi 9 pusiausvyros situacijas

$$A_1 = \|a_{1jk}\| = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \|a_{2jk}\| = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \|b_{i1k}\| = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$B_2 = \|b_{i2k}\| = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \|c_{ij1}\| = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \|c_{ij2}\| = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

GAMBIT suranda keturias grynąsias pusiausvyras:

Nr.	x_1	x_2	y_1	y_2	z_1	z_2	U	V	W
1	1	0	1	0	1	0	9	8	12
2	1	0	0	1	0	1	3	4	6
3	0	1	0	1	1	0	9	8	2
4	0	1	1	0	0	1	3	4	4

ir tris dalinai mišrias pusiausvyras:

Nr.	x_1	x_2	y_1	y_2	z_1	z_2	U	V	W
1	0,5	0,5	0,5	0,5	1	0	2,6667	2,6667	1,3333
2	0	1	0,3333	0,6667	0,3333	0,6667	4,5	4	3,5
3	0,25	0,75	1	0	0,25	0,75	2,25	2,75	3

Mūsų optimizavimo modelis suranda tas pačias grynąsias pusiausvyras ir dvi pilnai mišrias pusiausvyras:

Nr.	x_1	x_2	y_1	y_2	z_1	z_2	U	V	W
1	0,5	0,5	0,3333	0,6667	0,27	0,25	2,6667	2,6667	1,3333
2	0,25	0,75	0,5	0,5	0,3333	0,6667	4,5	4	3,5

Pavyzdys 2.

$$A_1 = \|a_{1jk}\| = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \|a_{2jk}\| = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \|b_{i1k}\| = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \|b_{i2k}\| = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$C_1 = \|c_{ij1}\| = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \|c_{ij2}\| = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

GAMBIT suranda dvi grynąsias pusiausvyras:

Nr.	x_1	x_2	y_1	y_2	z_1	z_2	U	V	W
1	0	1	1	0	0	1	2	-1	1
2	0	1	0	1	1	0	1	1	-2

Mūsų optimizavimo modelis suranda vieną grynąją pusiausvyrą ir begalinę pusiausvyrų aibę:

Nr.	x_1	x_2	y_1	y_2	z_1	z_2	U	V	W
1	0	1	1	0	0	1	2	-1	1
2	0	1	0	1	$1 - z_2$	z_2 $0 \leqslant z_2 \leqslant 0,5$	$1 - z_2$	$1 - 3z_2$	-2

Antroji GAMBIT surasta grynoji pusiausvyra yra begalinės pusiausvyrų aibės kraštinis taškas, kai $z_2 = 0$.

4. Išvados

Pateikti pavyzdžiai iliustruoja pusiausvyrų aibės struktūros įvairovę (3 lošėjų atveju) ir tai, kad naudojant mūsų metodą galima aptikti ir aprašyti begalinę pusiausvyros situacijų aibę, kas nėra įmanoma naudojant programinę įrangą GAMBIT.

Literatūra

1. J.F. Nash. Non-cooperative games. *Ann. Math.*, 54:286–295, 1951.
2. R. McKelvey, A. McLennan. Computation of equilibria in finite games. In: H. Amman, D. Kendrick, J.R. (Eds.), *Handbook of Computational Economics*, Vol. I. Elsevier, 87–142, 1996.
3. R. McKelvey, A. McLennan, T. Turocy. GAMBIT: Software tools for game theory, 2004. Available at `http://econweb.tamu.edu/gambit/`.
4. R. Porter, E. Nudelman, Y. Shoham. *Simple Search Methods for Finding a Nash Equilibrium.* Stanford University, 2005.
5. R.S. Datta. Finding all Nash equilibria of a finite game using polynomial algebra. In: *Econ Theory. Symposium*, 2009.

SUMMARY

S. Vakrinienė, D. Sūdžiūtė. Computation of Nash equilibria in three-person matrix game

The method for finding Nash equilibrium in three-person matrix game is introduced in this paper. Linear optimization model with binary variables for computation of equilibrium points in three-person matrix game is proposed.

Keywords: three-person matrix game, Nash equilibrium, partially integer linear programming.