Liet. mat. rink. LMD darbai, **48/49**, 2008, 84–86

Apie hiperplokštuminių elementų erdves su specialaus pavidalo metrikomis

Edmundas MAZĖTIS (VPU)
el. paštas: edmundas@vpu.lt

Reziumė. Nagrinėjamos metrinių hiperplokštuminių elementų erdvės su specialaus pavidalo metrikomis. Įrodyta, kad šios erdvės visuomet yra Kartano–Landsbergo erdvių analogai, surastos šių erdvių vidinių beveik kompleksinių ir beveik sandaugos struktūrų integruojamumo sąlygos.

Raktiniai žodžiai: hiperplokštuminių elementų erdvės, beveik kompleksinės ir beveik sandaugos struktūros, integruojamos struktūros.

Sakykime, kad (M^n, α) – n-matė Rymano erdvė, $\alpha_{ij}(x^k)$ – jos metrinio tenzoriaus komponentės koordinačių sistemoje $(x^1, x^2, ..., x^n)$. Jei T^*M^n – erdvės M^n koliestinė sluoksniuotė, (x^i, y_k) – jos lokaliosios koordinatės, tai tenzoriui α_{ij} atvirkštinis tenzorius α^{ik}, tenkinantis sąlygą $\alpha_{ij}\alpha^{ik} = \delta^k_j$, leidžia gauti invariantą

$$t = \frac{1}{2}\alpha^{ij}(x^k)y_i y_j, \tag{1}$$

vadinamą energija (žr.[2]). Jei $y^i = \alpha^{ik}y_k$, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $\partial^i = \frac{\partial}{\partial y_i}$, tai teisingos lygybės $\partial_i t = \frac{1}{2}\partial_i\alpha^{kh}y_k y_h$, $\partial^i t = y^i$, $\partial^i y^j = \alpha^{ij}$, $y^i y_i = 2t$.

Sakykime, kad γ^k_{ij} – tenzoriaus α_{ij} Kristofelio simboliai, o $L_{ij} = y_k\gamma^k_{ij}$. Tuomet diferencialiniai operatoriai $\delta_i = \partial_i + L_{ik}\partial^k$ bei ∂^i leidžia užrašyti liestinės erdvės $T_pT^*M^n$, $p \in T^*M^n$ invariantinį išskaidymą į tiesioginę sumą

$$T_pT^*M^n = T^v_pT^*M^n \oplus T^h_pT^*M^n. \tag{2}$$

Iš čia seka, kad diferencialinis-geometrinis objektas L_{ij} apibrėžia koliestinės sluoksniuotės T^*M^n tiesinę sietį. Iš lygybės $\gamma^k_{ij} = \partial^k L_{ij}$ seka [4], kad dydžiai γ^k_{ij} yra sluoksniuotės T^*M^n klasikinės afiniosios sieties komponentės.

Koliestinė sluoksniuotė T^*M^n yra vadinama metrine hiperplokštuminių elementų erdve [2], jei joje apibrėžtas neišsigimęs simetriškas tenzorinis laukas $g_{ij}(x^k, y_n)$, vadinamas metriniu tenzoriumi. Sakykime, kad $\alpha(t) \neq 0$ ir $\beta(t)$ – bet kokios nenulinės glodžios funkcijos. Apibrėžkime metrinį tenzorių g_{ij} lygybe:

$$g_{ij}(x^k, y_n) = \alpha(t)\alpha_{ij}(x^k) + \beta(t)y_i y_j. \tag{3}$$

Tuomet jam atvirkštinio tenzoriaus komponentėms teisinga lygybė

$$g^{ik} = \frac{1}{\alpha}\alpha^{ik} - \frac{\beta y^i y^k}{2(\alpha + 2\beta t)}; \quad \alpha \neq 0 \text{ ir } \alpha \neq -2\beta t. \tag{4}$$

Kadangi $g^{ij} y_i y_j = \frac{2t}{1+2\beta t}$, tai kai $\beta(t) > -\frac{1}{2t}$, metrika g_{ij} yra teigiamai apibrėžta.

Iš lygybių

$$\delta_i t = 0, \quad \delta_i y_j = L_{ij}, \quad \delta_i y^k = -\gamma^k_{ih} y^h \tag{5}$$

seka, kad tenzoriaus g_{ij} kovariantinė išvestinė $\nabla_k g_{ij}$ afiniosios sieties γ^h_{ij} atžvilgiu yra lygi nuliui. Tiesinės sieties L_{ij} kreivumo tenzorius $R_{ijk} = \delta_k L_{ij} - \delta_j L_{ik}$ ir afiniosios sieties kreivumo tenzorius $R^i_{jpq} = \partial_p \gamma^i_{jq} - \partial_q \gamma^i_{jp} + \gamma^i_{qk}\gamma^k_{jp} - \gamma^i_{pk}\gamma^k_{jq}$ yra susiję lygybe $R_{jpq} = R^k_{jpq} y_k$. Iš čia seka, kad metrinės hiperplokštuminių elementų erdvės afinioji sietis yra plokščia tada ir tik tada, kai plokščia yra tiesinė sietis L_{ij}.

Metrinio tenzoriaus g_{ij} Kartano tenzoriui $C^{ijk} = \frac{1}{2}\partial^k g^{ij}$ yra teisinga lygybė

$$C^{ijk} = -\frac{1}{2\alpha^3}(\alpha^{''}_{tt}\alpha - 2(\alpha^{'}_t)^2) y^i y^j y^k + \alpha\alpha^{'}_t(\alpha^{ik} y^j + \alpha^{jk} y^i + \alpha^{ij} y^k). \tag{6}$$

Iš lengvai patikrinamų tapatybių

$$\nabla_h y_i = 0, \quad \nabla_k y^i = 0, \quad \nabla_k t = 0 \tag{7}$$

išplaukia, kad $\nabla_h C^{ijk} = 0$. Taigi įrodyta teorema

1 teorema. *Metrinė hiperplokštuminių elementų erdvė su* (3) *pavidalo metrika yra Kartano–Landsbergo erdvių analogas su visomis diferencijuojamomis funkcijomis α ir β, jei tik $\alpha \neq 0, \alpha \neq -2\beta t$ ir $\beta(t) > -\frac{1}{2t}$.*

Metrinių hiperplokštuminių elementų erdvė M^n yra erdvė su absoliučiuoju paralelizmu, jei jos afinioji sietis yra plokščia (žr. [3]). Taigi metrinė hiperplokštuminių elementų erdvė yra su absoliučiuoju paralelizmu tada ir tik tada, kai metrinio tenzoriaus α_{ij} kreivumo tenzorius lygus nuliui.

Kaip įrodyta [1] darbe, metrinių hiperplokštuminių elementų erdvėje M^n egzistuoja vidinės beveik kompleksinės ir beveik sandaugos strukt$\bar{u}$ros. Jų strukt$\bar{u}$rinių tenzorių komponentės J^A_B $(A, B, C, \ldots = 1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots, 2n)$ tenkina lygybes $J^A_C J^C_B = \lambda\delta^A_B$ ($\lambda = -1$ arba $\lambda = 1$) ir užrašomos tokiomis lygybėmis:

$$J^i_j = -a g^{ik} L_{kj}, \quad J^{n+i}_{n+j} = a g^{jk} L_{ik},$$

$$J^{n+i}_j = \frac{\lambda}{a} g_{ij} - a g^{pq} L_{ip} L_{qj}, \quad J^i_{n+j} = a g^{ij}, \tag{8}$$

čia $a \neq 0$ – bet koks skaičius; kai $\lambda = -1$, gauname vienparametrinę beveik kompleksinių strukt$\bar{u}$rų šeimą, o kai $\lambda = 1$ – beveik sandaugos strukt$\bar{u}$rų šeimą.

2 teorema. *Metrinių hiperplokštuminių elementų erdvės M^n vidinės beveik kompleksinės ir beveik sandaugos strukt$\bar{u}$ros yra integruojamos tada ir tik tada, kai Rymano metrikos α_{ij} kreivumo tenzorius lygus nuliui, o funkcijoms $\alpha(t)$ ir $\beta(t)$ yra* *teisinga lygybė*

$$\frac{\alpha_t'(t)}{\alpha(t)} = \frac{\beta(t)}{\alpha(t)+2\beta(t)t}. \tag{9}$$

Teoremos įrodymui apskaičiuosime vidinių struktūrų Nijenhuiso tenzorių

$$N^A_{BC} = J^D_C(\partial_B J^A_D - \partial_D J^A_B) - J^D_B(\partial_C J^A_D - \partial_D J^A_C). \tag{10}$$

Įstatę tenzorių J išraiškas iš (8) lygybių ir atlikę skaičiavimus gauname, kad tenzorių N^A_{BC} komponentės su visais $a \neq 0$ yra nulinės tada ir tik tada, kai

$$R_{ipq} = 0, \quad \partial^k g^{ij} = \partial^i g^{jk}. \tag{11}$$

Iš (6) lygybės randame, kad

$$\partial^k g^{ij} - \partial^i g^{jk} = (y^k\alpha^{ij} - y^i\alpha^{kj})\Big(-\frac{\alpha_t'}{\alpha^2} + \frac{\beta}{\alpha(\alpha+2\beta t)}\Big). \tag{12}$$

Tuomet lygybė $\partial^k g^{ij} = \partial^i g^{jk}$ yra ekvivalenti (9) sąlygai. Kita vertus, iš sąlygos $R_{ipq} = 0$ išplaukia, kad afiniosios sieties γ^k_{ij} kreivumo tenzorius lygus nuliui, kas ir įrodo teoremą.

Pvz., hiperplokštuminių elementų erdvėje M^n su metrika

$$g_{ij} = t^m\alpha_{ij} + \frac{mt^{m-1}}{2m-1}y_iy_j, \quad g^{ij} = t^{-m}\alpha^{ij} + mt^{-1-m}y^iy^j, \quad m \neq \frac{1}{2} \tag{13}$$

(6) lygybėmis apibrėžtos beveik kompleksinė ir beveik sandaugos struktūros yra integruojamos.

Literatūra

1. E. Mazėtis, Apie Kartano erdvių geometriją, *Liet. matem. rink.*, **38**(2), 221–233 (1998).
2. D.D. Porosniuc, A class of locally symmetric Kähler Einstein structures on the nonzero cotangent bundle of a space form, *Balkan Journal of Geometry and its Application*, **9**(2), 68–81 (2004).
3. H. Rund, *The Differential Geometry of Finsler Spaces*, Springer (1959).
4. K. Yano, M. Kon, *Structures on Manifolds*, Singapoore World. Sci. Publ. Co. (1984).

SUMMARY

E. Mazėtis. On the geometry spaces of hyperlane elemente with special metric

In this paper analysies metric space of hyperlane elemente with special metric. Is prowed, that the space Kartan–Landsbeg space is. Criteria of integrability of the intrinsic almost complex and almost product structures is found.

Keywords: space of hyperlane elemente, almost complex and almost product structure, integrable structure.