Liet. matem. rink., T. 42, spec. nr., 59–62

Apie keturmačio toro ergodinius endomorfizmus

Birutė KRYŽIENĖ (VGTU), Gintautas MISEVIČIUS (VU)
el. paštas: gintautas.misevicius@maf.vu.lt

Pirmuose dviejuose šios serijos straipsneliuose [1] buvo įrodyta teorema apie keturmačio toro transformacijų tolygų pasiskirstymą. Tai analogiškų D. Moskvino rezultatų [2] dvimačiam ir trimačiam torams apibendrinimas specialiu būdu sukonstruotam paviršiui erdvėje $\mathbb{R}^4$.

Žymėkime $\Omega = \Omega_4$ keturmatį torą, t.y., aibę taškų

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4), \quad 0 \leqslant x_i < 1, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

su pakoordinačiui apibrėžta sudėties operacija (mod 1) ir Lebego matu μ.

Atvaizdavimas T: $\Omega \to \Omega$ apibrėžiamas

$$T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}V \ (\mathrm{mod}\ 1),$$

čia V yra kvadratinė neišsigimusi matrica su sveikais elementais.

Tegu $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ yra stačiakampis plokštumoje $\mathbb{R}^2$. Jame apibrėžtos dvi funkcijos $z = \varphi_1(x, y)$ ir $w = \varphi_2(x, y)$, $(x, y) \in Q$. Tada vektorius

$$\boldsymbol{\xi} = \big(x, y, \varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)\big)$$

aprašo paviršių Γ erdvėje $\mathbb{R}^4$.

Paviršiaus komponenčių kreivis yra išreiškiamas dydžiu

$$K_i = \frac{\varphi''_{ixx} \cdot \varphi''_{iyy} - (\varphi''_{ixy})^2}{(1 + (\varphi'_{ix})^2 + (\varphi'_{iy})^2)^2}, \quad i = 1, 2.$$

Reikalavimai paviršiui Γ išreiškiami dalinėmis išvestinėmis ir kreiviais K_i. Reikalavimai matricai – charakteringojo polinomo ir (arba) charakteringųjų šaknų savybėmis.

Primename pagrindinį [1] rezultatą.

1 teorema. *Tegu paviršiaus Γ komponenčių Gauso kreiviai K_1 ir K_2 tenkina sąlygą $K_1 \cdot K_2 > 0$. Tegu funkcijos $\varphi_1(x, y)$ ir $\varphi_2(x, y)$ turi dalines išvestines iki trečios eilės imtinai srityje Q. Jeigu matricos V charakteringasis polinomas turi skirtingas realiąsias šaknis ir yra neredukuojamas racionaliųjų skaičių kūne, tai beveik visiems Lebego mato μ_2 prasme taškams $(x, y) \in Q$ seka*

$$\big\{\big(x, y, \varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)\big) \cdot V^m\big\}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

yra tolygiai pasiskirsčiusi erdvės $\mathbb{R}^4$ vienetiniame kube $[0, 1]^4$.

Šiame darbe matricos V charakteringasis polinomas gali būti redukuojamas racionaliųjų skaičių kūne. Suformuluojame pagrindinį šio darbo rezultatą.

2 teorema. *Tegu paviršiaus* Γ *komponenčių Gauso kreiviai* K_1 *ir* K_2 *tenkina sąlygą* $K_1 \cdot K_2 > 0$. *Tegu funkcijos* $\varphi_i(x, y)$ $(i = 1, 2)$ *turi aprėžtas dalines išvestines iki trečios eilės imtinai. Jeigu matricos V charakteringosios šaknys yra skirtingos, tai beveik visiems Lebego mato* μ_2 *prasme taškams* $(x, y) \in Q$ *seka* $\{\boldsymbol{\xi} \cdot V^m\}$, $m = 1, 2, \ldots$, *yra tolygiai pasiskirsčiusi erdvės* $\mathbb{R}^4$ *vienetiniame kube* $[0, 1]^4$.

Įrodymas. Matricos V charakteringąsias šaknis žymėkime θ_i, o jas atitinkančius charakteringuosius vektorius $\boldsymbol{w}_i = (w_{i1}, w_{i2}, w_{i3}, w_{i4})$, $i = 1, 2, 3, 4$. Šiuo atveju vektoriai $\boldsymbol{w}_i$ gali turėti racionaliąsias komponentes. Tada kokiam nors vektoriui $\boldsymbol{m}$ su sveikomis komponentėmis gali būti $(\boldsymbol{w}_i \cdot \boldsymbol{m}) = 0$. Todėl įrodymui negali būti naudojama lema 5 iš [1] ir reiškinio K_f (žr. [1], II, p. 107) įvertinimas nėra teisingas.

Charakteringieji vektoriai $\boldsymbol{w}_i$ sudaro erdvės $\mathbb{R}^4$ bazę. Todėl kiekvieną vektorių $\boldsymbol{x}V^m \in \mathbb{R}^4$ galima išreikšti

$$\boldsymbol{x}V^m = \sum_{i=1}^{4} (v_{i1}x_1 + v_{i2}x_2 + v_{i3}x_3 + v_{i4}x_4) \cdot \theta_i^m \boldsymbol{w}_i,$$

čia v_{ik} yra realieji skaičiai, apibrėžti matricos V pagalba (žr. [1], II, p. 106).

Įveskime kintamųjų z_1, z_2, z_3, z_4 tiesines formas

$$D_k(z_1, z_2, z_3, z_4) = \sum_{i=1}^{4} v_{ik} \cdot (\boldsymbol{w}_i \cdot \boldsymbol{m}) \cdot z_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant 4. \tag{1}$$

žymėkime sutrumpintai

$$D_k(m) = D_k(\theta_1^m, \theta_2^m, \theta_3^m, \theta_4^m).$$

Pergrupavus dėmenis ir naudojant (1) gauname

$$\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{x}V^m = D_1(m)x_1 + D_2(m)x_2 + D_3(m)x_3 + D_4(m)x_4.$$

Tegu $|\theta_1| \leqslant |\theta_2| \leqslant |\theta_3| \leqslant |\theta_4|$. Pažymėkime

$$d = d(m) = \frac{1}{\ln m} \max\left(\left|\frac{\theta_2}{\theta_1}\right|^m, \left|\frac{\theta_3}{\theta_2}\right|^m, \left|\frac{\theta_4}{\theta_3}\right|^m \right), \quad m \geqslant 2.$$

Kadangi v_{ik} ir w_{ik} $(i, k = 1, 2, 3, 4)$ yra racionalieji skaičiai, tai galima rasti tokį laipsnio rodiklį m_0 ir tokią konstantą c_0, kad iš nelygybės

$$|m_1| + |m_2| + |m_3| + |m_4| \leqslant d(m) \tag{2}$$

išplaukia įvertis

$$|D_k(m)| \geqslant c_0 |\theta_4|^4, \quad m \geqslant m_0, \quad 1 \leqslant k \leqslant 4. \tag{3}$$

Pasinaudosime žinomu E. Titchmarch [4] rezultatu (žr. taip pat [5]).

Lema. *Tegu stačiakampyje $Q \subset \mathbb{R}^2$ yra apibrėžta reali funkcija $f(x,y)$ su aprėžtomis dalinėmis išvestinėmis iki trečios eilės imtinai. Jeigu paviršiaus $(x,y,f(x,y))$ kreivis nelygus nuliui, tai teisingas įvertis*

$$I(z) = \iint\limits_Q \exp\bigl(2\pi i z f(x,y)\bigr)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \mathrm{O}\bigl(z^{-1/3}\bigr).$$

Kadangi tiesinės formos $D_4(z_1,z_2,z_3,z_4)$ tapatingai nelygios nuliui, tai galime apibrėžti funkciją

$$f(x,y) = \frac{D_1(m)}{D_4(m)}\cdot x + \frac{D_2(m)}{D_4(m)}\cdot y + \varphi_1(x,y) + \varphi_2(x,y),$$

tenkinančią visas lemos sąlygas. Naudojant lemą ir $f(x,y)$ savybes, nesunku įsitikinti, kad galioja nelygybė

$$\iint\limits_Q \exp\bigl(2\pi i(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\xi}V^m)\bigr)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < c_1\bigl|D_4(m)\bigr|^{-m/3}, \tag{4}$$

jei tik

$$|m_1| + |m_2| + |m_3| + |m_4| < c_1|\theta_4|, \qquad c_1 = \mathrm{const},$$

ir galioja (3).

Iš čia gauname, kad bet kuriai funkcijai g priklausančiai Korobovo klasei (žr. [3]) $E_3^\alpha(c)$, $\alpha > 1$, galioja įvertis

$$\begin{aligned}\iint\limits_Q g(\boldsymbol{\xi}V^m)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \mu_2(Q)\int_{\Omega_4} g(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \mathrm{O}\Bigl(\bigl|\theta_4^{-m/3}\bigr| + {\sum}'\frac{1}{(\overline{m}_1\overline{m}_2\overline{m}_3\overline{m}_4)^\alpha}\Bigr)\\ &= \mu_2(Q)\int_{\Omega_4} g(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \mathrm{O}\Bigl(\bigl|\theta_4^{-m/3}\bigr| + \frac{1}{(d(m))^{\alpha-1}}\Bigr)\\ &= \mu_2(Q)\int_{\Omega_4} g(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \mathrm{O}\bigl(\mathrm{e}^{-\lambda_0 m}\bigr),\end{aligned}$$

čia

$$\overline{m}_k = \begin{cases} 1, & \text{jeigu } m_k = 0,\\ |m_k|, & \text{jeigu } m_k \neq 0,\end{cases}$$

$\lambda_0 = \mathrm{const}$, o $\sum'$ reiškia sumavimą pagal visus vektorius $\boldsymbol{m}$, tenkinančius nelygybę

$$|m_1| + |m_2| + |m_3| + |m_4| > d(m).$$

Tolesnis įrodymas sutampa su 1 teoremos iš [1] įrodymu.

3 teorema. *Tegu paviršius* Γ *tenkina anksčiau nurodytas sąlygas. Tegu matrica* $V = \|a_{ij}\|$ *yra diagonalinė ir* $a_{ii} = a > 1$. *Tada lieka teisingas* 2 *teoremos tvirtinimas.*

Įrodymas. Turime

$$\xi V^m = (x, y, \varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)) V^m = a^m (x, y, \varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)).$$

Iš (4) nelygybės gauname

$$\iint\limits_Q \exp(2\pi i(\boldsymbol{m} \cdot \xi V^m))\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y < c_2 a^{-m/3}, \quad c_2 = \text{const}.$$

Tolesni samprotavimai sutampa su 2 teoremos įrodymu.

Literatūra

[1] G. Misevičius, Uniform distribution on the four-dimesional torus, I, *Liet. Matem. Rink.*, **40**, (spec. nr.), 68–75 (2000); II, *Liet. Matem. Rink.*, **41**, (spec. nr.), 106–112 (2001).

[2] D. Moskvin, About the projections of ergodic endomorphisms takong origin on the smooth curves, in: *Actual Problems of Analytic Number Theory*, Nauka i Technika, Minsk (1974) (in Russian).

[3] N.M. Korobov, *Trigonometric Series and Their Applications*, Nauka, Moscow (1989) (in Russian).

[4] E.C. Titchmarch, *The Theory of Riemann Zeta-Function*, Oxford (1951).

[5] S.H. Min, On the order of $\zeta(\frac{1}{2} + it)$, *Trans. Amer. Soc.*, **65**, 448–472 (1949).

About uniform distribution of four-dimensional torus

B. Kryžienė, G. Misevičius

Results on the uniform distribution of ergodic endomorphisms on the four-dimensional torus are obtained. They extend previous results [1] for the case when the characteristic polynomial of matrix V may be reducible.