Liet. matem. rink., T. 42, spec. nr., 178–183

Dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemos su kintamais koeficientais supaprastinimo klausimu

Donatas JURGAITIS (ŠU)
el. paštas: pletra@cr.su.lt

Paprastųjų diferencialinių lygčių sistemų, su eilės išsigimimu, sprendimo metodų apibendrinimas dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemoms, kurių eilė išsigimsta, sunkus ir sudėtingas uždavinys [1]. Šis uždavinys abiejų tipų diferencialinių lygčių sistemoms ypatingai pasunkėja, kada galioja sąlyga, kad pagrindinės sistemos koeficientų matricos tikrinės reikšmės yra sveikieji skaičiai ar jų skirtumai yra sveikieji skaičiai [2]. Spręsdami tokio tipo uždavinius daugelis autorių [3], [4], [5] bando surasti keitinius, kurių pagalba nagrinėjama sistema suvedama į sistemą, kurios struktūra patogi sprendinių skaičiaus nustatymui, tų sprendinių radimui ir jų struktūros tyrimui. Šiame darbe tirsime keturių pirmos eilės dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemą trimatėje kompleksinėje erdvėje. Tiriamosios sistemos eilė išsigimsta hiperplokštumos $x = 0$ taškuose.

Nagrinėkime Moisilo–Teodoresko sistemą [6] su jaunesniaisiais nariais, kurios matricinis užrašas yra toks:

$$x^{p+1}\left(E\frac{\partial u}{\partial x} + I_1\frac{\partial u}{\partial y} + I_2\frac{\partial u}{\partial z}\right) + A(x,y,z)u = 0, \tag{1}$$

čia p – natūralusis skaičius arba nulis, x, y, z – nepriklausomi kompleksiniai kintamieji, $u(x,y,z) = (u_1(x,y,z), u_2(x,y,z), u_3(x,y,z), -u_4(x,y,z))$ – ieškomoji vektorfunkcija, E – vienetinė ketvirtos eilės kvadratinė matrica,

$$I_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

duotos pastovios ketvirtos eilės kvadratinės matricos, $A(x,y,z)$ – žinoma kintamųjų x, y ir z funkcija, be to, jai galioja dėstinys laipsnine eilute

$$A(x,y,z) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k A_k(y,z), \tag{2}$$

kuri konverguoja srityje K: $\{|x| < r_1, |y| < r_2, |z| < r_3\}$. Hiperplokštumos $x = 0$ taškuose išsigimsta (1) dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemos eilė.

Dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemoje (1) ieškomąją vektorfunkciją $u(x, y, z)$ pakeitę nauja ieškomąja vektorfunkcija $v(x, y, z)$ keitinio

$$u(x, y, z) = T_1 v(x, y, z), \tag{3}$$

čia T_1 - pastovi neypatinga ketvirtos eilės kvadratinė matrica, pagalba gauname naują dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemą

$$x^{p+1}\left(ET_1\frac{\partial v}{\partial x} + I_1T_1\frac{\partial v}{\partial y} + I_2T_1\frac{\partial v}{\partial z}\right) + A(x, y, z)T_1v = 0. \tag{4}$$

Padauginę (4) sistemą iš kairės iš matricos T_1^{-1}, gauname tokią dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemą:

$$x^{p+1}\left(E\frac{\partial v}{\partial x} + J_1\frac{\partial v}{\partial y} + J_2\frac{\partial v}{\partial z}\right) + T_1^{-1}A(x, y, z)T_1v = 0, \tag{5}$$

čia $J_1 = T_1^{-1}I_1T_1$, $J_2 = T_1^{-1}I_2T_1$.

Matricų I_1 ir I_2 tikrinės reikšmės yra i ir $-i$ ir abi jos antrojo kartotinumo. Matricos I_1 Žordano kanoninė forma yra matrica $J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Kadangi matricos J_1 ir I_1 turi tuos pačius elementariuosius daliklius, tai jos yra panašios ir egzistuoja neypatinga kvadratinė matrica $T_1 : J_1 = T_1^{-1}I_1T_1$ ir $T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Pastebėkime, kad $J_2 = T_1^{-1}I_2T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Matrica I_1 suvedama į Žordano matricą J_1 neypatingos matricos T_1 pagalba, o matrica I_2 panaši į matricą J_2 ir abiejų struktūra yra blokinė-diagonalinė.

Keitinio (3) pagalba dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemos (1) pagrindinės dalies matricas I_1 ir I_2 suvedame į Žordano normaliąją formą, kuri patogi tolimesniems tyrimams.

Nagrinėkime (3) keitinį, kuriame pastovią neypatingą matricą T_1 keičiame ketvirtos eilės kvadratine matrica funkcija $T(y, z)$, kurios determinantas nėra tapatingai lygus nuliui. Po šio keitinio dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistema (1) atrodo taip:

$$x^{p+1}\left(E\frac{\partial v}{\partial x} + K_1(y, z)\frac{\partial v}{\partial y} + K_2(y, z)\frac{\partial v}{\partial z}\right) + B(x, y, z)v = 0, \tag{6}$$

čia $K_1(y,z) = T^{-1}(y,z)I_1T(y,z)$, $K_2(y,z) = T^{-1}(y,z)I_2T(y,z)$, $B(x,y,z)$ tenkina tokią matricinę diferencialinę lygtį

$$x^{p+1}\left(I_1\frac{\partial T}{\partial y} + I_2\frac{\partial T}{\partial z}\right) + AT - TB = 0.$$

$B(x,y,z)$ dėstinys laipsnine x eilute egzistuoja ir to dėstinio pagrindinis narys yra [7]

$$\begin{aligned} B(0,y,z) &= T^{-1}(y,z)A_0(y,z)T(y,z) \\ &= diag\left(\lambda_1(y,z), \lambda_2(y,z), \lambda_3(y,z), \lambda_4(y,z)\right), \end{aligned}$$

čia $\lambda_i(y,z)$, $i = 1,2,3,4$ – matricos $A_0(y,z)$, tikrinės reikšmės.

Vadinasi, keitinio (3), kuriame $T_1 = T(y,z)$, pagalba (1) dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistema suvedama į dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemą (6), kurios koeficientų dėstinio laipsnine eilute pagrindinis narys yra blokinė diagonalioji matrica funkcija.

Dabar dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemoje (1) ieškomąją vektorfunkciją $u(x,y,z)$, pakeiskime nauja ieškomąja vektorfunkcija $v(x,y,z)$, keitinio

$$u(x,y,z) = (E + x^\alpha P_\alpha(y,z))\, v(x,y,z), \tag{7}$$

čia α – natūralusis skaičius, E – vienetinė matrica, $P_\alpha(y,z)$ – kol kas nežinoma kintamųjų y ir z matrica funkcija, pagalba.

Įrašę (7) į (1) sistemą gauname tokią dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemą:

$$\begin{aligned} & x^{p+1}\left(E + x^k P_\alpha\right) E\frac{\partial v}{\partial x} + \alpha x^{p+\alpha}P_\alpha v + x^{p+1+\alpha}\left(I_1\frac{\partial P_\alpha}{\partial y} + I_2\frac{\partial P_\alpha}{\partial z}\right) v \\ & + x^{p+1}I_1\left(E + x^k P_\alpha\right)\frac{\partial v}{\partial y} + x^{p+1}I_2\left(E + x^k P_\alpha\right)\frac{\partial v}{\partial z} \\ & + A(x,y,z)\left(E + x^k P_\alpha\right) v = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Pasinaudokime formaliu dėstiniu

$$\begin{aligned} (E + x^\alpha P_\alpha(y,z))^{-1} &= E - x^\alpha P_\alpha(y,z) + x^{2\alpha}P_\alpha^2(y,z) + \ldots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(x^\alpha P_\alpha(y,z)\right)^k, \end{aligned} \tag{9}$$

ir (8) sistemą padauginkime iš kairės iš $(E + x^\alpha P_\alpha(y,z))^{-1}$. Po gremėzdiškų pertvarkymų, gauname tokią dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemą

$$x^{p+1}\left(E\frac{\partial v}{\partial x} + J_1(x,y,z)\frac{\partial v}{\partial y} + J_2(x,y,z)\frac{\partial v}{\partial z}\right) + B(x,y,z)v = 0, \tag{10}$$

kurioje

$$J_1(x,y,z) = I_1 + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{\alpha k} P_\alpha^{k-1}(y,z)(P_\alpha I_1 - I_1 P_\alpha),$$

$$J_2(x,y,z) = I_2 + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{\alpha k} P_\alpha^{k-1}(y,z)(P_\alpha I_2 - I_2 P_\alpha),$$

$$B(x,y,z) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{l=0}^{k}(-1)^{k-l+1} x^{\alpha(k-l+1)+l} P_\alpha^{k-1}(P_\alpha A_l - A_l P_\alpha)\right.$$
$$\left.+(-1)^k x^{\alpha(k+1)+p}\alpha P_\alpha^{k+1})\right]$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{p+1+\alpha(k+1)} P_\alpha^k\left(I_1\frac{\partial P_\alpha}{\partial y} + I_2\frac{\partial P_\alpha}{\partial z}\right) + \sum_{k=0}^{\infty} x^k A_k(y,z). \tag{11}$$

Pastebėkime, kad (11) matricos funkcijos tenkina sąlygas:

$$J_1(0,y,z) \equiv I_1, \quad J_2(0,y,z) \equiv I_2, \quad B(0,y,z) \equiv A_0(y,z). \tag{12}$$

Dabar detaliau išaiškinkime $B(x,y,z)$ struktūrą ir būdus kaip nustatyti matricą-funkciją $P_\alpha(y,z)$. Kadangi α yra natūralusis skaičius, tai iš (11) ir (12) nesunku pastebėti, kad (7) keitinys nekeičia pirmųjų α (1) dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemos koeficiento $A(x,y,z)$ dėstinio laipsnine eilute koeficientų. Koeficiento prie x^α išraiška bus tokia:

$$B_\alpha(y,z) = \begin{cases} A_\alpha(y,z) + A_0(y,z)P_\alpha(y,z) - P_\alpha(y,z)A_0(y,z) + \alpha P_\alpha(y,z), & p=0, \\ A_\alpha(y,z) + A_0(y,z)P_\alpha(y,z) - P_\alpha(y,z)A_0(y,z), & p>0. \end{cases} \tag{13}$$

Tarkime, kad $A_0(y,z)$ yra tokios struktūros matrica:

$$A_0(y,z) = \left(\delta_{ij}A^{(i)}(y,z)\right), \quad i,j = 1,2,\dots, \ s \leqslant 4, \ \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{14}$$

Pasinaudoję matricos $A_0(y,z)$ suskaldymu į blokus (14) atitinkamus matricų $B_\alpha(y,z)$, $A_\alpha(y,z)$, $P_\alpha(y,z)$ blokus pažymėkime $B_\alpha^{(r,s)}(y,z)$, $A_\alpha^{(r,s)}(y,z)$, $P_\alpha^{(r,s)}(y,z)$, čia viršutiniai indeksai reiškia, kad blokas yra r-tosios eilutės ir s-tojo stulpelio susikirtime. Šių submatricų elementus žymėkime atitinkamai $b_{ij}(y,z)$, $a_{ij}(y,z)$, $p_{ij}(y,z)$, $i,j = 1,2,3,4$.

Matricos $A_0(y,z)$ Žordano langus atitinkančius skirtingas tikrines reikšmes $\rho_r(y,z)$, $\rho_s(y,z)$ žymėkime taip:

$$A^{(r)}(y,z) = \rho_r(y,z)E_r + L_r, \quad A^{(s)}(y,z) = \rho_s(y,z)E_s + L_s, \quad r,s = 1,2,3,4, \tag{15}$$

čia E_r, E_s – vienetinės matricos, matricų L_r, L_s visi elementai yra nuliai, išskyrus elementus virš pagrindinės įstrižainės, kurie lygūs vienetui.

Iš (13) gauname, kad

$$B_\alpha^{(r,s)}(y,z) = \begin{cases} A_\alpha^{(r,s)}(y,z) + A_0(y,z)P_\alpha^{(r,s)}(y,z) \\ \quad -P_\alpha^{(r,s)}(y,z)A_0(y,z) + \alpha P_\alpha^{(r,s)}(y,z), & p = 0, \\ A_\alpha^{(r,s)}(y,z) + A_0(y,z)P_\alpha^{(r,s)}(y,z) \\ \quad -P_\alpha^{(r,s)}(y,z)A_0(y,z), & p > 0. \end{cases} \tag{16}$$

Iš (13), pareikalavę, kad $B_\alpha^{(r,s)}(y,z)$ struktūra atitiktų $A_0(y,z)$ struktūrą, gauname sąlygas matricos funkcijos $P_\alpha^{(r,s)}(y,z)$ elementų nustatymui. Šios sąlygos yra

$$\begin{aligned} &a_{ij} + (\rho_r - \rho_s)p_{ij} + p_{i+1j} - p_{ij+1} - kp_{ij} = 0, \quad p = 0, \\ &a_{ij} + (\rho_r - \rho_s)p_{ij} + p_{i+1j} - p_{ij+1} = 0, \quad p > 0, \ i,j = 1,2,3,4. \end{aligned} \tag{17}$$

Iš (17), randame $p_{ij}(y,z)$ išraiškas. Jos yra tokios:

$$\begin{aligned} p_{ij} &= -\frac{a_{ij}}{\rho_r - \rho_s + \alpha}, \\ p_{ij+1} &= \frac{1}{\rho_r - \rho_s + \alpha}(p_{ij} - a_{ij+1}), \\ p_{i-1j} &= \frac{1}{\rho_r - \rho_s + \alpha}(p_{ij} - a_{i-1j}), \\ p_{i-1j+1} &= \frac{1}{\rho_r - \rho_s + \alpha}(p_{i-1j} - p_{ij+1} - a_{i-1j+1}), \end{aligned} \tag{18}$$

čia $p_{0j}(y,z) \equiv 0, j = 1,2,3,4, p_{i5}(y,z) \equiv 0, i = 1,2,3,4.$

Visi $p_{ij}(y,z)$ $i,j = 1,2,3,4$, nustatomi vienareikšmiškai, jeigu visiems y ir z: $|y| < r_2$, $|z| < r_3$, $p_r(y,z) - p_s(y,z) + \alpha \neq 0$. Atveju $p = 0$, $p_r(y,z) - p_s(y,z) + \alpha = 0$ to padaryti negalima ir šiuo atveju $p_{ij}(y,z) \equiv 0$, $i,j = 1,2,3,4$.

Jeigu $A_0(y,z) = \rho(y,z)E$, tai analogiškai kaip čia buvo išdėstyta nustatoma matrica $P_\alpha(y,z)$. Jos koeficientų išraiškos bus tokios:

$$p_{(i,j)}(y,z) = \begin{cases} -\dfrac{a_{ij}(y,z)}{\alpha}, & i \neq j, \\ -\dfrac{\rho(y,z) - a_{ij}(y,z)}{\alpha}, & i = j. \end{cases}$$

Gautąjį rezultatą suformuluokime kaip teoremą.

Teorema. *Dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistema* (1) *keitinio* (2) *pagalba suvedama į dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemą* (10), *kurioje pirmieji* α $B(x,y,z)$ *dėstinio* x *laipsnine eilute koeficientai sutampa su* $A(x,y,z)$ *dėstinio* x *laipsnine eilute koeficientais ir dėstinio* $B(x,y,z)$ *laipsnine* x *eilute koeficiento* $B_\alpha(y,z)$ *struktūra sutampa su koeficiento* $A_0(y,z)$ *struktūra.*

Keitinį (7) taikykime (1) imdami $\alpha = 1,2,\ldots$ ir apibrėžkime tokio tipo formalų keitinį

$$u(x,y,z) = \big[(E + xP_1)(E + x^2P_2)(E + x^3P_3)\ldots\big]v(x,y,z). \tag{19}$$

Taikydami šį keitinį dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemai (1) pasiekiame, kad visi $A(x,y,z)$ dėstinio x laipsnine eilute koeficientai $A_k(y,z)$ $k = 1,2,\ldots$ turėtų pagrindinio dėstinio nario matricos $A_0(y,z)$ struktūrą. Vadinasi, (1) dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemą suskaldome į atskiras, dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemas, atitinkančias $A_0(y,z)$ blokinę struktūrą.

Išvada. Jeigu $A_0(y,z)$ blokinė-diagonalinė matrica, tai formalaus keitinio (19) pagalba dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistema (1) suskaldoma į tokią dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemą:

$$
\begin{aligned}
&x^{p+1}\left(E\frac{\partial u^{(i)}}{\partial x} + J_1\frac{\partial u^{(i)}}{\partial y} + J_2\frac{\partial u^{(i)}}{\partial z}\right) + A^{(i)}(x,y,z)u^{(i)} = 0,\\
&u(x,y,z) = \left(\delta_{ij}u^{(i)}(x,y,z)\right),\\
&A^{(i)}(x,y,z) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k A_k^{(i)}(y,z), \qquad i = 1,2,\ldots,s \leqslant 4.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Literatūra

[1] А.И.Янушаускас, *Аналитическая теория эллиптических уравнений*, Наука СО, Новосибирск (1979).

[2] H.I. Turrittin, Convergent solutions of ordinary linear homogeneous differential equations in the neighborhood of an irregular singular point, *Acta Mathematica*, **93**, 27–66 (1955).

[3] В. Вазов, *Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений*, Мир, Москва (1968).

[4] В.Х. Фроим, Представление аналитических решений некоторых матричных уравнений с частными производными, *Дифференциальные уравнения*, **8**(10), 1848–1856 (1972).

[5] J. Horn, Über die Reichentwicklungen der Integrale eines Systems von Differentialgleichungen in der Umgebung gewisser singularen Stellen, *Journal für reine und angewandte Mathematiker*, **117**, 104–128, 254–266 (1897).

[6] А.И.Янушаускас, *Моногомерные эллиптические системы с переменными коэффициентами*, Мокслас, Вильнюс (1990).

[7] М.В.Федорюк, Изомонодромные деформации уравнений с иррегулярной особенностью, *Дифференциальные уравнения*, **22**(6), 961–967 (1986).

On simplification system of partial differential equations with variable coefficients

D. Jurgaitis

The system with junior variable coefficients of Moisil–Theodoresco is analysed in the article. The line of the system degenerates in points of the hyper-plane. A changeable element is found, with the help of which the structure of the selected coefficient is changed by the power line of the system coefficient exposing element. The structure of this coefficient conforms to the structure of the principal matrix of the system coefficient exposing element. A formal changeable element is found, which allows the system to be divided into partial systems, when the principal matrix of the exposing element of the system junior members is blocking.