Liet. matem. rink., T. 42, spec. nr., 301–305

Branduolinio reaktoriaus matematinis modelis su vėlavimu, priklausančiu nuo reaktoriaus galios

Kostas BUČYS, Rasa GRIGOLIENĖ, Jolanta JANUTĖNIENĖ,
Donatas ŠVITRA (KU)
el. paštas: bucysk@one.lt

Įvadas

Branduolinių reaktorių darbo stacionarių režimų stabilumas yra tokia charakteristika, kuri apibrėžia reaktoriaus darbingumą ir galimybę jį normaliai eksploatuoti [1]. Todėl šiai problemai skiriamas didelis dėmesys. Branduoliniai reaktoriai, apskritai kalbant, yra objektai su pasiskirsčiusiais parametrais, todėl pakankamai griežti jų matematiniai modeliai aprašomi netiesinėmis diferencialinėmis lygtimis dalinėmis išvestinėmis arba prie tam tikrų papildomų supaprastinimų – lygtimis su vėluojančiu argumentu [2, 3]. Stabilumo ir autosvyravimų sistemose su pasiskirsčiusiais parametrais ir sistemose su vėlavimu bifurkacijų teorija išvystyta darbuose [4, 5, 6].

1. Branduolinio reaktoriaus dinamikos modelis

Branduolinio reaktoriaus dinamikos taškinį modelį, kuriame atsižvelgta į vėluojančių neutronų įtaką ir į vidinį grįžtamąjį ryšį, sudaro dviejų diferencialinių lygčių su vėlavimais sistema [7]:

$$\overset{\bullet}{N}(t) = r_N\left[1 + a\left(1 - \frac{C(t)}{C_0}\right) - \frac{N(t-h_N)}{N_0}\right]N(t), \tag{1.1}$$

$$\overset{\bullet}{C}(t) = r_C\left[\frac{N(t)}{N_0} - \frac{1}{C_0}\sum_{j=1}^{6}\alpha_j C(t-h_j)\right]C(t). \tag{1.2}$$

Čia r_N – neutronų tankio tiesinio augimo koeficientas; r_C – vėluojančių neutronų tiesinio augimo koeficientas; a $(-1 < a \leqslant 0)$ – reaktoriaus galią reguliuojantis mažas parametras; $N(t)$ – visų neutronų tankis (reaktoriaus galia) laiko momentu t; N_0 – jo stacionari reikšmė; $C(t)$ – vėluojančių neutronų (branduolių pirmtakų) sumarinis tankis laiko momentu t; C_0 – jo stacionari reikšmė; $h_N > 0$ – vėlavimas, atspindintis trikdžius grįžtamojo ryšio grandinėje „galia–reaktyvumas“; $h_j > 0$ – vėlavimas, reiškiantis vėluojančių neutronų j-osios grupės generacijos laiką (skilimo pusperiodį $T_{1/2}$); $\alpha_j = \beta_j/\beta$ – vėluojančių neutronų santykinė išeiga ($\sum_j \alpha_j = 1$).

Tarkime, kad branduoliniame reaktoriuje vyksta lėti procesai su vėluojančiu grįžtamuoju ryšiu. Jei vėluojančių neutronų įtakos nepaisoma, tai branduolinio reaktoriaus modelis (1.1)–(1.2) užrašomas viena logistine lygtimi su vėlavimu

$$\overset{\bullet}{N}(t) = r\left[1 - \frac{N(t-h)}{N_0}\right]N(t), \tag{1.3}$$

kur $r = r_N$ – neutronų tankio tiesinio augimo koeficientas; $h = h_N > 0$ – vėlavimas, perduodant trikdžius grįžtamojo ryšio grandinėje „galia–reaktyvumas“. Kiti pažymėjimai kaip ir modelyje (1.1)–(1.2).

Vėlavimas grįžtamojo ryšio grandinėje nėra pastovus dydis, bet priklauso nuo reaktoriaus galios [1, 2]. Todėl vietoje (1.3) nagrinėsime modelį

$$\overset{\bullet}{N}(t) = r\left[1 - \frac{N(t-\Delta(N(t)))}{N_0}\right]N(t). \tag{1.4}$$

Priklausomybę Δ nuo $N(t)$ parinksime pavidalu [6]

$$\Delta(N) = h\exp\left[a\left(1 - \frac{N}{N_0}\right)\right]. \tag{1.5}$$

2. Tiesinė analizė

Lygtis (1.4) turi dvi pusiausvyros būsenas, t.y., 1) $N(t) \equiv 0$ ir 2) $N(t) \equiv N_0$. Pirmoji iš jų yra nestabili. Antrosios pusiausvyros būsenos stabilumo ištyrimui lygtyje (1.4) atlikę keitinį

$$N(t) = N_0\left[1 + x(t/h)\right], \tag{2.1}$$

gausime diferencialinę lygtį

$$\overset{\bullet}{x}(t) + rh\left[1 + x(t)\right]x\left[t - \exp\left(-ax(t)\right)\right] = 0, \tag{2.2}$$

kurios tiesinės dalies charakteringasis kvazipolinomas yra

$$P(\lambda) \equiv \lambda + rh\exp(-\lambda). \tag{2.3}$$

Kvazipolinomas (2.3) turi gerai žinomas savybes. Kai $0 < rh \leqslant \pi/2$, visų (2.3) kvazipolinomo šaknų realiosios dalys yra neigiamos, o kai $rh = \pi/2$, tai $P(\lambda)$ turi vieną paprastų grynai menamų šaknų porą $\pm i\pi/2$ [6]. Vadinasi, teisingas teiginys

1.1 teorema. *Intervalas* $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ *yra lygties* (1.4) *pusiausvyros būsenos* $N(t) \equiv N_0$ *asimptotinio stabilumo sritis* D_0.

Toliau nagrinėsime, kaip kinta kvazipolinomo (2.3) šaknys pereinant per tašką $a = rh = \frac{\pi}{2}$ iš intervalo $(0; \frac{\pi}{2})$ į intervalą $(\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2})$. Tegul $a = rh = \frac{\pi}{2} + \varepsilon$, kur $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$ ir ε_0 – mažas.

Nagrinėsime kvazipolinomą

$$P(\lambda,\varepsilon)=\lambda+\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)\exp(-\lambda). \tag{2.4}$$

Tarkim,

$$\lambda(\varepsilon)=\tau(\varepsilon)+i\sigma(\varepsilon) \tag{2.5}$$

šaknis, tenkinanti sąlygas $\tau(0)=0$, $\sigma_0=\sigma(0)=\frac{\pi}{2}$.

Tuomet, diferencijuodami tapatybę

$$P\left[\lambda(\varepsilon),\varepsilon\right]\equiv 0,$$

pagal ε, gauname

$$\tau_0'=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\tau(\varepsilon)\,|_{\varepsilon=0}=\frac{2\pi}{\pi^2+4}>0,\quad \sigma_0'=\frac{4}{\pi^2+4}>0. \tag{2.6}$$

Taigi, pereinant iš intervalo $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)=D_0$ į intervalą $\left(\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right)=D_2$ atsiranda dvi kompleksinės sujungtinės šaknys $\lambda(\varepsilon)$ ir $\overline{\lambda}(\varepsilon)$ su teigiama realia dalimi. Srityje D_2 diferencialinės lygties (1.4) tiesinė dalis turi vieno dažnio stabilų periodinį sprendinį [5, 6].

3. Netiesinė analizė

Nagrinėsime netiesinę diferencialinę lygtį

$$\overset{\bullet}{x}(t)+\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)\left[1+x(t)\right]x\left[t-\exp(-ax(t))\right]=0. \tag{3.1}$$

Sakykime, kad

$$x(\tau,\xi)=\xi\cos\frac{\pi}{2}\tau+\xi^2x_2(\tau)+\xi^3x_3(\tau)+\ldots, \tag{3.2}$$

$$\varepsilon(\xi)=b_2\xi^2+b_4\xi^4+\ldots, \tag{3.3}$$

$$c(\xi)=c_2\xi^2+c_4\xi^4+\ldots. \tag{3.4}$$

Kadangi $\tau_0'>0$, tai diferencialinei lygčiai (3.1) galima taikyti diferencialinių lygčių su vėlavimu, priklausančiu nuo ieškomos funkcijos, periodinio sprendinio sudarymo metodiką [6]. Remiantis ja, lygtyje (3.1) keitiniu $t=(1+c)\tau$ ($|c|<1$) normuojame laiką ir įstatome eilutes (3.2)–(3.4), be to mūsų atveju $\sigma_0=\pi/2$. Gautoje tapatybėje, prilyginę nuliui koeficientus prie ξ^2 ir ξ^3, gausime diferencialines lygtis

$$x_2'(\tau)+\frac{\pi}{2}x_2(\tau-1)=-\frac{\pi}{8}(a\pi+2\sin\pi\tau+a\pi\cos\pi\tau), \tag{3.5}$$

$$x_3'(\tau) + \frac{\pi}{2}x_3(\tau-1) = -(b_2 + \frac{\pi}{2}c_2)\sin\frac{\pi}{2}\tau - c_2\frac{\pi^2}{4}\cos\frac{\pi}{2}\tau$$
$$-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}\tau x_2(\tau) - \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}\tau x_2(\tau-1)$$
$$-\frac{a\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}\tau\Big[x_2'(\tau-1) + \frac{\pi}{2}x_2(\tau) + \frac{\pi}{4}(2-a)\cos^2\frac{\pi}{2}\tau\Big]. \tag{3.6}$$

Iš lygties (3.5) gauname

$$x_2(\tau) = -\frac{1}{4}a\pi + A_{2S}\sin\pi\tau + A_{2C}\cos\pi\tau, \tag{3.7}$$

kur

$$A_{2S} = \frac{1-a\pi}{10}, \quad A_{2C} = \frac{4+a\pi}{20}. \tag{3.8}$$

Lygybių (3.7)–(3.8) pagalba ir tiesinės nehomogeninės diferencialinės lygties (3.6) išsprendžiamumo sąlyga trigonometrinių daugianarių klasėje, gauname, kad

$$b_2 = \frac{1}{80}\left[6\pi - 4 + 4\pi(1+\pi)a - 5\pi(3+\pi)a^2\right], \tag{3.9}$$
$$c_2 = \frac{1}{40\pi}\left[4 - 4\pi a + 5\pi(3+\pi)a^2\right]. \tag{3.10}$$

Funkcija $b_2(a)$ įgyja maksimumą taške

$$a_{\max} = \frac{2(1+\pi)}{5(3+\pi)}, \tag{3.11}$$

o lygi nuliui taške

$$a_0 = a_{\max} + \sqrt{a_{\max}^2 + \frac{2(3\pi-2)}{5\pi(3+\pi)}}. \tag{3.12}$$

Taigi, iš atliktų skaičiavimų ir iš [6] išplaukia toks teiginys:

2.1 teorema. *Kai* $0 < rh - \pi/2 = \varepsilon << 1$ *ir* $0 \leqslant a < a_0$, *kur* a_0 *apibrėžtas formule* (3.12), *tai diferencialinė lygtis* (1.4) *pakankamai mažoje pusiausvyros būsenos* $N(t) \equiv N_0$ *aplinkoje turi stabilų periodinį sprendinį, kuris išreiškiamas*

$$N(t) = N_0\left[1 + \xi\cos\frac{\pi}{2}\tau + \xi^2 x_2(\tau) + O(\xi^3)\right]. \tag{3.13}$$

Čia

$$\xi = \sqrt{\frac{rh-\pi/2}{b_2}}, \quad \tau = \frac{t}{h(1+c_2\xi^2)}, \tag{3.14}$$

o $x_2(\tau)$ apibrėžiama formulėmis (3.7)–(3.8).

Periodinio sprendinio (3.13)–(3.14) „harmoniškumo laipsnį" apibrėžia dydis

$$H = \frac{1}{20}\sqrt{5(4 + \pi^2 a^2)}. \tag{3.15}$$

Akivaizdu, kad funkcija $H(a)$, kai $0 \leqslant a < 1$, yra monotoniškai didėjanti. Tai reiškia, kad parametrui a didėjant, modelio (1.4) periodinių sprendinių harmoniškumas mažėja. Kadangi, kai $a = 0$, modelis (1.4) tampa modeliu (1.3), tai modelio (1.4) periodiniai sprendiniai ne tokie harmoningi, kaip modelio (1.3) periodiniai sprendiniai.

4. Išvados

Iš bazinio branduolinio reaktoriaus dinamikos modelio išskirta jo modifikacija su vėluojančiu grįžtamuoju ryšiu, priklausančiu nuo reaktoriaus galios. Nustatyta, kad pereinant per tašką $a = rh = \frac{\pi}{2}$ iš intervalo $(0; \frac{\pi}{2})$ į intervalą $(\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2})$ atsiranda kvazipolinomo (2.3) dvi kompleksinės sujungtinės šaknys $\lambda(\varepsilon)$ ir $\overline{\lambda}(\varepsilon)$ su teigiama realia dalimi. Netiesinė analizė padaryta bifurkacijų teorijos pagalba, kur sukonstruotas modelio artutinis stabilus periodinis sprendinys. Apibrėžtas modelio periodinio sprendinio „harmoniškumo laipsnis".

Literatūra

[1] Ф.М. Митенков, Актуальные задачи динамики энергетических реакторов, Вопросы атомной науки и техники, *Физика и техника ядерных реакторов*, 6(19), 3–5 (1981).

[2] В.Д. Горяченко, С.Л. Золотарев, В.А. Колчин, *Исследования динамики ядерных реакторов качественными методами*, Энергоатомиздат, Москва (1988).

[3] Д. Швитра, К. Бучис, Роль запаздывания в динамике ядерных реакторов, *Литовский физический журнал*, 39(6), 451–455 (1999).

[4] Ю.С. Колесов, В.С. Колесов, И.И. Федик, *Автоколебания в системах с распределенными параметрами*, Наукова думка, Киев (1979).

[5] Ю.С. Колесов, Д.И. Швитра, *Автоколебания в системах с запаздыванием*, Мокслас, Вильнюс (1979).

[6] Д.И. Швитра, *Динамика физиологических систем*, Мокслас, Вильнюс (1989).

[7] K. Bučys, D. Švitra, Reaktoriaus dinamikos modelio analizė, *LDM mokslo darbai*, 3, 336–341 (1999).

A mathematical model of a nuclear reactor with delay depending on the power of the reactor

K. Bučys, R. Grigolienė, J. Janutėnienė, D. Švitra

There is analysed the problem of the stability of the reactor using a nonlinear mathematical model. By the method of D-decomposition there is done linear analysis and obtained a region of asymptotic stability D_0 and the region D_2 in which there appear a stable periodical solution. The nonlinear analysis of the model was done with the help of the theory of bifurcations. There is received an approximate periodical solution of one frequency of the model and determined the "degree of harmonicity" of the solution.