Liet. matem. rink., T. 41, spec. nr., 369–376

Kas tai yra paprastas, bet įdomus uždavinys?

Romualdas KAŠUBA (VU)
el. paštas: romualdas.kasuba@maf.vu.lt

Tikrai nėra labai lengva kalbėti apie tai, kas tai būtų gražus matematinis uždavinys. Dar sunkiau yra apskritai apibūdinti grožį, nors sunku, o gal net dar sunkiau jo nepastebėti. Kitaip sakant, apie grožį, jį išvydus, sunku ir nekalbėti.

Panašiai ir matematikoje – pamatę uždavinį ir išsprendę jį arba neiškentę perskaitę jo sprendimą, mes dažnai pasakome – gražu, nuostabu, netikėta, kas galėtų pagalvoti, kokia originali idėja, kas per nelauktas sprendimas ar kaip panašiai.

Ilgametė darbo su gabiais studentais ir moksleiviais patirtis bei darbo su olimpiadininkais įgūdžiai padrąsino autorių imtis šios temos turint vilties, kad pasiseks pademonstruoti skaitytojui, kokie gražūs, įdomūs ir patrauklūs gali būti jau patys paprasčiausiausi arba net kiekvienam mokiniui suprantami uždaviniai.

Teatras prasideda nuo drabužinės, o uždavinys...

prasideda nuo sąlygos. Todėl grakšti, logiškai nepriekaištinga ir glausta uždavinio formuluotė turi didžiulės reikšmės. Ji galėtų būti gretinama ir su laikraščio straipsnio antrašte, kuri turėtų būti patraukli ar kitaip intriguojanti, kad turėtume papildomą akstiną perskaityti tą straipsnį.

Gražios sąlygos pavyzdžiu neabejotinai galėtų būti kad ir toks 1999 metų „Kengūros" konkurso „Bičiulių" grupės (5–6 klasės) 22 uždavinys už 5 taškus:

Jeigu šeši šimtai šeši šveicarai suvalgo šešis šimtus šešias dešreles, iš jų šešis šimtus dešrelių su garstyčiomis ir šešias – be, tai kiek dešrelių be garstyčių reikia patiekti šešiems šimtams šešiems tūkstančiams šešiems šimtams šešiems šveicarams?

Taip ir prisimeni žmogus mūsiškes „šešias žąsis su šešiais žąsyčiais" ir apskritai tokių sąlygų lengva užsiklausyti.

Kitu grakščios sąlygos pavyzdžiu galėtų būti šių, 2001 metų dėdės Beno meškeriojimo istorija arba „Senjorų" grupės 29 uždavinys už penkis taškus, autoriaus anksčiau aptiktas Baltarusijos jaunesniųjų klasių olimpiadoje:

Dėdė Benas pagavo kelias žuvis. Tris didžiausias žuvis jis atidavė katinui, ir jo laimikio masė sumažėjo 35 procentais. Kai tris mažiausias žuvis jis atidavė šuniui, tai laimikis dar sumažėjo penkiomis tryliktosiomis likusių žuvų masės. Kiek žuvų pagavo dėdė Benas?

Dažnai uždavinys gali būti patrauklus dėl kelių priežasčių – mūsų atveju iš pirmo žvilgsnio visai neįtikima, kad uždavinys turi vienui vienintelį teisingą atsakymą, o būtent, kad dėdė Benas iš viso bus pagavęs lygiai 10 žuvų.

Ne tik moksleiviams ir studentams, bet taip ir mokytojams bei kitiems sprendžiantiesiems visada artimesni yra tokie uždaviniai, kurių „veiksmo" aplinkybės yra „įprastinės" – tada lengviau įsijausti.

Pavyzdžiu galėtų būti dar vienas baltarusiškas uždavinys:

Autobusu važiavo nepilnas šimtas keleivių, o stovėjusių keleivių buvo dvigubai daugiau negu sėdinčių. Vienoje stotelėje išlipo lygiai 4 procentai autobusu važiavusių keleivių. Kiek žmonių dabar dar yra autobuse?

Uždavinys patrauklus ne tik savo „gyvenimiška" sąlyga, bet dar ir tuo, kad vėl atrodo, kad čia galėtų būti daug atsakymų – o jis ir vėl vienintelis – dvigubai daugiau stovinčių negu kad sėdinčių „maskuoja" visų važiavusių keleivių skaičiaus dalumą iš 3, o tai, kad įmanoma išlipti lygiai 4 procentams keleivių, patvirtina to keleivių skaičiaus dalumą dar ir iš 25. Todėl jų ką tik buvo 75, o dabar, žinia, liko 72.

Problemos būna patrauklios ir tuo, kad juose harmoningai dera teorija su praktika, juose minatiūriniu lygiu atkartojamas nelyginant atskiros mokslo šakos vystymasis – pirmiau vyksta konkrečių faktų apžvalga ir analizė, vėliau yra keliami klausimai ir duodami konkretūs ir (nors „didžiajame" moksle taip būna retai – ten klausimai nesibaigia, tiksliau, vienas išspręstas atsakymas kelia šimtą kitų klausimų – panašiai kaip liaudies dainoj dainuojama: „žemė kelė žolę, žolė kėlė rasą, rasa kėlė pasagėlę, pasagėlė – žirgą") galutiniai atsakymai.

Pirmuoju, kiek paprastesniu, bet labai gražiu ir paprastu pavyzdžiu galėtų būti 2000 metų atvirosios Latvijos olimpiados 6 klasės uždavinys – skaitytojas jame aptiks visus minėtuosius mokslo teorijos komponentus ir žavu yra tai, kad visa tai absoliučiai prieinama šeštaklasiui. Štai to pamokomo uždavinio sąlyga – tokia ji trumpa ir paprasta.

Kokia gali gali būti mažiausia iš 7 be liekanos besidalijančio natūraliojo skaičiaus skaitmenų suma?

Paprastai sakant, mūsų klausiama, kokius natūraliuosius skaičius įmanoma gauti sudėjus iš 7 be liekanos besidalijančio skaičiaus skaitmenis.

Bet kuris konstruktyviai nusiteikęs sprendžiantysis – tarp taip nusiteikusių sprendėjų žvalių šeštokų apstu – pirmiausiai atliktų vadinamąjį skaitinį eksperimentą, kad susivoktų, ko apskritai galima tikėtis – kitaip sakant, jis neabejotinai išrašytų kad ir visus pirmosios šimtinės iš 7 be liekanos besidalijančius skaičius arba

$$7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91 \text{ ir } 98$$

ir, suskaičiavęs tų skaičių skaitmenų sumą, žvelgtų į eilutę

$$7, 5, 3, 10, 8, 6, 13, 11, 9, 7, 14, 12, 10 \text{ ir } 17.$$

Kokias išvadas jis iš to galėtų padaryti? Neabejotina, kad pirmiausiai jis pastebėtų, kad pati mažiausioji pasitaikiusi suma yra 3, o pati didžiausioji – 17. Toliau matematinio sumanumo krislas jam neabejotinai pakuždėtų, jeigu iš 7 be liekanos besidalijančio skaičiaus suma gali būti 3 – o tokią turi skaičius 21, tai toji suma gali būti ir 6 – tam užtenka tik „klonuoti" „gabalą" 21 – arba imti skaičių 2121, akivaizdžiai – prisiminkime dalybą stulpeliu – irgi besidalijantį be liekanos iš septynių, ir 9 – dar sykį „paklonuokime" arba imkime skaičių 212121, ir apskritai bet kuris 3n skaitmenų sumą turintis skaičius panašiai gali būti gautas kaip iš 7 besidalijančio skaičiaus 2121...21 skaitmenų suma.

Dabar „praturtėję patyrimu“ mes suprantame, kad labai gerai būtų surasti iš 7 be liekanos besidalijantį skaičių su kaip įmanoma mažesne skaitmenų suma – tuo efektyvesnis tada būtų tokių skaičių „klonavimas“.

Turint sumą, kuri lygi 3, akys natūraliai krypsta į galimai dar mažesnes sumas arba 2 ar 1 lygias skaitmenų sumas. Parankiausia būtų surasti kokį nors iš 7 besidalijantį skaičių, kurio skaitmenų suma yra 1 - tada „klonuodami“ gautume, kad bet kuris skaičius yra iš 7 be liekanos besidalijančio skaičiaus skaitmenų suma. Tačiau tuo atveju, kai mes tikimės vienetui lygios iš 7 be liekanos besidalijančio skaičiaus skaitmenų sumos, mus ištinka lengvas nusivylimas, nes 1 lygią skaitmenų sumą turintys skaičiai yra

$$1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000\ldots$$

tesidalina tik iš 2 ar 5 arba iš jų laipsnių ir tokių laipsnių sandaugų, todėl iš 7 tokie skaičiai niekaip nesidalina.

Sekančio pagal mažumą skaitmenų suma yra 2 – ir jeigu toks skaičius atsirastų, tai, „klonuodami“ jį, kaip skaitmenų sumą galėtume gauti ir visus lyginius skaičius, kaip iš 7 be liekanos besidalijančių skaičiaus skaitmenų sumą – o dar prirašinėdami 21 – gautume apskritai visus kitus skaičius, žinoma, išskyrus 1.

Taigi dabar esminiu arba „raktiniu“ klausimu tampa klausimas – ar atsiras toks iš 7 be liekanos besidalijantis skaičius, kurio skaitmenų suma lygi 2?

Pasidaro įdomu pasižiūrėti, kokie yra dviems lygią skaitmenų sumą turintys skaičiai? Tai yra skaičiai

$$11, 101, 1001, 10001, 100001, 1000001$$

arba tokie skaičiai su kažkiek prie jų prirašytų nulių, bet kaip nesunku suprasti, tų nulių prirašymas jokios reikšmės dalybai iš 7 neturi. Dabar paprastas aritmetinis išradingumas pakužda mums, jog mes galime imti vienetą su daug nulių ir dalinti jį „stulpeliu“ iš 7, ir palūkėti, kol pasitaikys 2 lygi liekana, o jau tada sekančioje skiltyje vietoje įpratinio 0 paimti 1 – 21 juk jau dalijasi iš 7! Mūsų atveju šis procesas baigiasi vos prasidėjęs:

$$\begin{array}{r|l}
-1001 & 7 \\ \cline{2-2}
\underline{7} & 143 \\
-30 & \\
\underline{28} & \\
-21 & \\
\underline{21} & \\
0 &
\end{array}$$

Ištvermingesniam skaitytojui siūlytume panašų uždavinį arba kokios yra galimos visų iš 23 be liekanos besidalijančių skaičių skaitmenų sumos – siūlome susipažinti su 2000 metų Antrosios respublikinės Lietuvos jaunesniųjų klasių moksleivių olimpiados uždaviniu – o šiais metais ji vyks trečiąjį kartą, bet jau dviem amžiaus grupėmis. Šiuo atveju skaitytojui prireiks daugiau ištvermės vienetą su daugybe nulių bedalijant iš 23 ir belaukiant, kol liekana bus lygi 16, nes tada, prirašius 1, skaičius 161 jau pasidalins iš 23. Dar pasufleruotume, kad mūsų „metų" skaitmuo 2001 irgi dalijasi iš 23.

Todėl skaitytojas pajustų, kad atsakymas būtų toks pat ir iš 7, ir iš 23 besidalijančių skaičių atveju.

Kyla natūralus klausimas apibūdinti visus tokius skaičius, iš kurių be liekanos besidalijančių skaičių skaitmenų sumos duoda visus skaičius, išskyrus 1.

O dabar – dar gražesnis giminingas uždavinys su finansinio pobūdžio konkrečios padėties analize ir su subtilia samprotaujamąja baigiamąja dalimi. Ši gražybė paimta iš Rusijos 8-tųjų klasių olimpiados.

Ant stalo krūvelėmis išsklaidyta 1 000 000 dolerių. Yra žinoma, kad jungiant krūveles į krūvas galima sudaryti ir 8 vienodas superkrūvas po 125 000, ir 5 vienodas superkrūvas po 200 000 dolerių. Klausiama, kiek daugiausiai pinigų galima turėti pačioje mažiausioje krūvelėje?

Pradžioje buvo eksperimentas. Jeigu tą milijoną būtume išskirstę krūvelėmis po 25 000 dolerių, tai tokių krūvelių būtų, žinoma, 40 ir, jungdami jas į superkrūvas po penkias, gautume 8 superkrūvas po 125 000, o, jungdami jas į krūvas po 8, gautume ir 5 superkrūvas po 200 000 dolerių. Vadinasi, mažiausioje krūvelėje (jos visos tokios!) yra 25 000 dolerių. Tolesni bandymai beveik neišvengiamai atvestų prie tokio skirstinio, kai turime 5 krūveles po 50 000, dar kitas 5 po 75 000 ir dar trečias 5 – po 125 000 dolerių. Akivaizdu, kad jungdami jas gausime sąlygoje prašomas superkrūvas.Visi kiti bandymai pakelti mažiausiąją krūvą į „dar aukštesnį lygį" pasirodo esą nesėkmingi. Žinoma, tai dar nereiškia, kad to padaryti neįmanoma – kas žino, gal mums tik nepavyksta. Tačiau, kita vertus, tai gali paakinti mus pamėginti gauti prieštarą tarus, kad mažiausioje krūvelėje galėtų būti daugiau negu 50 000 dolerių. Nuo šios vietos prasideda vadinamieji teoriniai samprotavimai arba prieštaros paieškos – nors, aišku, kad galingas arba bent kiek pajėgesnis kompiuteris beveik pajėgtų ir „mechaniškai" perrinkti visus variantus.

Taigi, tarkime, kad ant stalo atsirado toks pinigų skirstinys, kurio pačioje mažiausioje krūvelėje yra jau daugiau negu 50 000 dolerių. Dabar labai svarbu pasirinkti „stebėjimo tašką" arba sekantį žingsnį arba klausimą ir paklauskime, ar tame skirstinyje yra tokia krūvelė, kurioje yra 125 000 doleriai „vienoje vietoje". Tokia krūvelė gali būti – tada sakysime, kad atsakymas yra „taip" arba, jei tokios krūvelės nėraš sakysime, kad atsakymas yra „ne".

Jeigu atsakymas yra „taip", tai tada ant stalo turi rastis ir krūvelė su 75 000 dolerių, kitaip formuojant vieną kurią 200 000 dolerių superkrūvą reikėtų juk panaudoti ir mūsų 125 000 krūvelę su dar bent dviem kitom krūvelėm – vienos nepakaks – juk ant stalo 75 000 krūvelės nėra! Bet „su dar bent dviem kitom krūvelėm" reiškia, kad tada mažų mažiausiai per dvi krūveles susirenka 75 000 dolerių, o tai akivaizdžiai pažeidžia sąlygą, kad mažiausioje krūvelėje yra daugiau negu 50 000 dolerių.

Taigi, jeigu yra 125 000 krūvelė, tai yra ir 75 000 krūvelė. O jei yra 75 000 dolerių krūvelė, tai ji įeis į kurią nors 125 000 formuojančią superkrūvą ir tada ant stalo būtinai turės rastis ir krūvelė, kurioje yra 50 000 dolerių arba ir mažiau.

Vadinasi atveju „taip" jau turime prieštarą. Stengsimės gauti prieštarą ir tuo atveju, kai atsakymas yra „ne" arba kai ant stalo atskiros 125 000 dolerių krūvelės nesama. Tada į kiekvieną formuojamą 125 000 superkrūvą turi įeiti bent dvi krūvelės arba iš viso ant stalo yra bent 16 krūvelių, jes juk 125 000 superkrūvos yra 8! Tada – dėmesio - atsišaukia Dirichle principas, šiuo kartu liudijantis, kad į bent vieną 200 000 superkrūvą įeis bent 4 krūvelės – kitaip jų tebūtų daugių daugiausiai 15! O jeigu kurią nors 200 000 dolerių superkrūvą sudaro bent 4 krūvelės, tai akivaizdi netiesa yra tai, kad kiekvienoje krūvelėje yra daugiau kaip po 50 000 dolerių. Vadinasi, turime prieštarą ir atveju „ne" o tai reiškia, kad daugiau kaip 50 000 dolerių pačioje mažiausioje krūvelėje turėti neįmanoma.

Kuo patrauklus prieštaros metodas arba kodėl mums įdomu tai, kad kas nors apskritai neįmanoma?

Prieštaros arba sokratiškasis, arba suvedimo į aiškią nesąmonę metodas skaičiuoja jau tūkstančius metų. Viena vertus, jis yra labai subtilus – juk samprotaujama apie ko nors negalimumą, antra vertus, praktika neginčijamai liudija, kad jis taip žadina mūsų fantaziją, kad net kyla klausimas, o kodėl taip yra?

Šioje vietoje galimi keli atsakymai. Vienas iš jų galėtų būti toks, jog klausiant žmogaus, kodėl kas nors neįmanoma, klausiamasis intuityviai tarsi prisiima atsakomybę už tai, kad to padaryti neįmanoma. Jaunimas nebijo pasijusti atsakingas už tai, kas taip intriguojančiai vyksta.

Pradėkime nuo visai paprasto pavyzdžio.

Ratuku yra surašyti skaičiai 1, 0, 1, 0, 0 ir 0. Leidžiama paimti bet kuriuos du gretimus skaičius ir prie jų abiejų pridėti po vienetą. Ar galima, pakartojus šią procedūrą keletą kartų, padaryti taip, kad visi tie skaičiai būtų lygūs? Atsakymas yra „ne", todėl, kad susumavus kas antrą narį ir paėmus gautųjų sumų tarpusavio skirtumą, jis būtų lygus 2 ir nesikeistų atlikus eilinę tokią operaciją. Iš pradžių tas kas antro skaitmens sumų tarpusavio skirtumas yra lygus 2 ir toks jis visada išliks, tuo tarpu, jeigu tie skaičiai galėtų pasidaryti lygūs, tai tų abiejų kas antro skaičiaus sumų skirtumas būtų lygus 0, o tai yra neįmanoma.

Panagrinėkime gerokai subtilesnį pavyzdį. Ar galima ratuku surašyti skaičius nuo 1 iki 12 taip, kad bet kurių dviejų gretimų skaičių skirtumas būtų lygus arba 3, arba 4, arba 5?

Paprasti bandymai surasti tokį išdėstymą normalių pabandymų būdu baigiasi nesekme ir tai mus kelia papildomų klausimų. Nors kas nors nepavyksta, tai tai visai nereiškia, kad tai neįmanoma.

Šiuo atveju, kai mėginimai surikiuoti skaičius taip, kaip norėtų uždavinys, baigiasi nesėkme, skatina mus ieškoti kokios nors paprastesnės prieštaros.

Analizė priveda prie to, jog 6 iš tų dvylikos skaičių arba 1, 2, 3, 10, 11 ir 12 tikrai nėra artimi viens kitam ir negali būti kaimynais. Todėl skaičiai 1, 2, 3, 10, 11 ir 12 turėtų būti išsidėstę tarp tų dvylikos skaičių nuo 1 iki 12 tik kas antroje vietoj – tai vienintelis įmanomas būdas.

Tačiau tada skaičius 4 turi kažkur pakliūti ir turėti du kaimynus iš jau minėtųjų šešių skaičių 1, 2, 3, 10, 11 ir 12, tačiau iš jų jis turi tik vieną kaimyną, o tai rodo, kad taip ratuku skaičių nuo 1 iki 12 išdėstyti neįmanoma.

Pasižiūrėkime į dar vieną chrestomatinį tos rūšies uždavinį. Įsivaizduokime, kad turime šachmatų lentą, iš kurios yra pašalinti du patys tolimiausieji langeliai. Ar galima tokią lentą su dviem „iškąstais“ tolimiausiais langeliais padengti įprastiniu būdu įprastiniais domino kauliukais?

Neturint spalvinimo patirties uždavinį būtų galima spręsti labai ilgai ir apskritai negauti sprendimo. Uždavinio sprendimą arba atsakymą „ne“ atskleidžia tai, kad nuspalvinus lentą įprastiniu šachmatiniu būdu arba, kitaip sakant, juodai baltai, bus 30 vienaip ir 32 kitaip nuspalvintų langelių. Bet jeigu tai būtų įmanoma tai kiekvienas domino kauliukas uždengtų vieną juodą ir vieną baltą langelį. Gautoji prieštara demonstruoja kad šachmatų lentą su dviem „iškąstais“ tolimiausiais langeliais uždengti domino kauliukais neįmanoma.

Siūlome drąsiam skaitytojui labai smagų uždavinį apie tai, kodėl 10×10 matmenų lentos neįmanoma įprastiniu būdu padengti 25 1×4 matmenų kauliukais?

Pabaigai vėl apie gražias sąlygas

Įsivaizduokime, jog susidūrėme su tokiu uždaviniu – esame prašyti rasti tokį patį mažiausią skaičių, kuris ne tik baigiasi 17, bet ir jo skaitmenų suma yra 17 ir kuris pats dalijasi be liekanos iš 17?

Uždavinys gražus tuo, kad čia labai padeda vienas vadinamasis judesys arba sprendimo „atomas“.

Įsivaizduokime, kad nes radome tokį patį mažiausiąjį skaičių, kuris baigiasi 17, kurio skaitmenų skaitmenų suma lygi 17 ir kuris pats dalijasi be liekanos iš 17. Tas judesys galėtų būti toks – atimkime iš tokio skaičiaus 17, tada gautasis skirtumas baigiasi dviem nuliais ir taip pat dalijasi be liekanos iš 17 o jo skaitmenų suma yra lygi 9. Dabar jau pats paprasčiausias skaitinis eksperimentas atsakymu siūlo skaičių 153 arba pilnas uždavinio sprendimas yra skaičius 15317.

Uždavinys, patrauklus savo sąlygos paradoksalumu

Tai yra gerai žinomas uždavinys iš A. Grincevičiaus ir J. Mačio Lietuvos jaunųjų matematikų olimpiadinio uždavinyno arba tai yra toks uždavinys – visų aštuntokų berniukų pažymių vidurkis yra mažesnis už visų devintokų berniukų pažymių vidurkį ir visų aštuntokių mergaičių pažymių vidurkis yra mažesnis už visų devintokių mergaičių pažymių vidurkį. Ar gali būti, kad visų aštuntokų pažymių vidurkis būtų didesnis už visų devintokų pažymių vidurkį?

Filosofiškai žiūrint, uždavinį net nedrąsu pradėti spręsti. Juk jeigu ir aštuntokės mergaitės, ir aštuntokai berniukai vidurkiškai blogesni atitinkamai už devintokus ir devintokes, tai ir globaliai aštuntokai juk privalėtų būti blogesni negu devintokai – nejaugi jie dalimisi būdami galėtų blogesniais galėtų tikėtis kaip visuma būti geresniais?

Dar vienas (ne)paprastas uždavinys ir dar kitas net dar (ne)paprastesnis

Turime natūralųjį arba kitaip sveiką ir dar teigiamą skaičių. Gali būti, kad tas skaičius yra toks pat ar jį skaitysi normaliai ar atvirkščiai kaip kad, pavyzdžiui, skaičius 6116. Tokį skaičių vienodai skaitomą ar normaliai, ar atvirkščiai, vadinsime nulinės klasės simetriniu skaičiumi. Jeigu skaičius nėra simetrinis ar palindromas, arba kaip mes dabar jau sakome, nulinės klasės simetrinis skaičius, tai mes prie to skaičiaus pridedame tą „apgręžtą" skaičių. Gali būti, kad tada ta suma jau bus toks skaičius, kuris yra yra vienodas ar tiesiogiai ar atvirkščiai jį beskaitytum. Pavyzdys yra skaičius 209. Apgręžtas skaičius yra 902 ir jų suma yra skaičius $209 + 902 = 1111$ arba jau simetrinis skaičius arba palindromas. Tada sakysime, kad 209 yra pirmos klasės simetrinis skaičius. Labai įdomu būtų nustatyti, ar yra norimai aukštos klasės simetrinių skaičių ir apskritai ar kiekvienas skaičius simetrizuojasi? Tas klausimas jau buvo užduotas ir „Kompiuterijos" žurnalo skaitytojams. Jų nuomonė buvo tokia, kad arba skaičius gana greitai simetrizuojasi arba apskritai ne. Tai yra įdomus skaitytojo proto ir įjungto kompiuterio galios palyginimo uždavinys.

Dar vienas uždavinys, liudijantis, jog beveik bėra paprastų dalykų, būtų toks. Vėl imame bet kurį n-ženklį skaičių ir prie jo pridedame jo apgręžtinį skaičių. Ar galime sumoje negauti nė vieno lyginio skaitmens, kai n yra lygus 1999, 2000 ir kai 2001.

Uždavinys primena mums sudėtį kampu. Vėl užtenka prisiminti skaičių 209, jo apgręžtinis yra 902, o jų suma yra 1111 arba ten nėra jokio lyginio skaitmens – todėl visai aišku, kaip elgtis ne tik atveju $n = 3$, bet ir $n = 7$ – yra juk skaičius 2020909 ir t.t., tuo sureguliuojant ir atvejį $n = 1999$. Toliau pavyzdys $1122 + 2211 = 3333$ „sureguliuoja" ne tik atvejį $n = 4$, bet ir $n = 8$ – imkite skaičių 11112222 ir t.t. – tuo pačiu ir atvejį, kai $n = 2000$. Pats įdomiausias atvejis yra tas, kai n yra 2001 arba redukavus, kai n lygus 5. Konkretūs atvejai „nesigauna", todėl vėl reikia imti abstrakčiai samprotauti. Linkime sėkmės sprendžiant Lietuvos komandinės olimpiados uždavinį.

Apie vieną labai sudėtingą Pasaulinės jaunųjų matematikų olimpiados Amerikoje uždavinį ir neregėtai išdygusį be galo paprastą jo sprendimą

To gražaus ir iš pradžių atrodžiusio beveik neįveikiamo uždavinio sąlyga yra tokia:

Matematikų varžybose dalyvavo dvidešint viena mergaitė ir dvidešimt vienas berniukas. Žinoma, kad kiekvienas dalyvis išsprendė daugiausiai šešis uždavinius ir kad kiekvienai mergaitės ir kiekvieno berniuko porai yra bent vienas uždavinys, kurį išsprendė abu šie dalyviai. Įrodykite, kad yra toks uždavinys, kurį išsprendė mažiausiai trys mergaitės ir trys berniukai.

Olimpiadoje pirmiau buvo pateiktas neregėtai arba labai sudėtingas to uždavinio sprendimas – kol galiausiai pačioje pabaigoje pasirodė trijų eilučių ilgumo sprendimas dar kartą demonstruojantis matematikos grožį ir tai, kad tobulumui ribų nėra.

Pabaigai norėtume pateikti dar vieną paradoksalų uždavinį.

Ar įmanoma 35×23 matmenų lentą ištisai uždengti 5×7 matmenų stačiakampiais?

Literatūra

[1] A. Grincevičius, J. Mačys, *Lietuvos jaunųjų matematikų olimpiadų uždaviniai*, Šviesa, Kaunas (1989).
[2] *Kengūra*, Leidykla TEV, Vilnius (1999).
[3] *Kengūra*, Leidykla TEV, Vilnius (2000).
[4] *Alfa plius Omega*, **2**, TEV, Vilnius (2001).

What is simple but exciting mathematical problem?

R. Kašuba

In the paper some methods and ideas concerning the solving of non-formal mathematical problems are discussed and investigated.