LMD mokslo darbai, 122–126
1998, Vilnius

Задача Коши для неоднородного вырождающегося эллиптического уравнения второго порядка

Д. Корсакене (ШУ)

Как известно, задача Коши для эллиптических уравнений некорректна. Однако, для однородных уравнений с аналитическими коэффициентами методами функций комплексного переменного удается решить эту задачу [2, 4]. Решения уравнений строятся в виде рядов по степеням z. Исследование структурных свойств решений этих уравнений существенно опирается на изучение задачи Коши с данными на гиперплоскости z = 0.

В настоящей работе рассматривается неоднородное эллиптическое уравнение второго порядка

$$u_{zz} + z^k \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f(z, X), \quad k \geq 0, \tag{1}$$

где $u = u(z, X)$ и $f(z, X)$ – голоморфная в *G(A)* функция и *A* – полицилиндр комплексного пространства $\boldsymbol{C}^m$. Доказывается, что какова бы ни была функция $f(z, X)$, голоморфная в некоторой области, существует голоморфное решение уравнения (1). В случае трех переменных решение выражается через гипергеометрическую функцию Гаусса. Заметим, что при $k = 0$ уравнение (1) является частным случаем уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + L(u) = f(z, X), \, L(u) = \sum_{j,l=1}^{\infty} A_{jl}(x_1, x_2, \ldots x_m) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_l}, \tag{2}$$

которое изучено в работе [4].

1. Построим частное голоморфное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям $u\big|_{z=0} = 0, \quad u_z\big|_{z=0} = 0$. Так как голоморфную функцию f в некоторой окрестности полицилиндра A: $(z = 0)$ можно представить следующим образом [4]

$$f(z, X) = \sum_{l=0}^{\infty} z^l f_l(x_1, x_2, \ldots, x_m) = f_1(z^2, x_1, x_2, \ldots, x_m) + z f_2(z^2, x_1, x_2, \ldots, x_m),$$

то прежде всего рассмотрим случай когда

$$f(z, x_1, x_2, \ldots, x_m) = z^l f_l(x_1, x_2, \ldots, x_m),$$

где $f_l(X)$ – голоморфная в полицилиндре A функция и l – целое положительное число. Решение уравнения (1) будем искать в виде ряда

$$u_l(z,X)=\sum_{j=1}^{\infty} z^{j(k+2)+l+2} g_j^{(l)}(X). \qquad (3)$$

Подставив (3) в (1) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, получим

$$(l+2)(l+1)g_0^{(l)}(X)=f_l(X),$$

$$\left[l+2+j(k+2)\right]\left[l+1+j(k+2)\right]g_j^{(l)}(X)+\Delta g_{j-1}^{(l)}(X)=0 \quad (j=1,2,\ldots).$$

Преобразовав последнее уравнение, находим формулу для функций $g_j^{(l)}(X)$

$$g_j^{(l)}(X)=(-1)^j\frac{\Gamma\left(1+\frac{l+2}{k+2}\right)\Gamma\left(1+\frac{l+1}{k+2}\right)\Delta^j g_0^{(l)}(X)}{(k+2)^{2j}\Gamma\left(j+1+\frac{l+2}{k+2}\right)\Gamma\left(j+1+\frac{l+1}{k+2}\right)} \quad (j=1,2,\ldots).$$

Учитывая, что $\Delta^j g_0^{(l)}(X)=\dfrac{1}{(l+2)(l+1)}\Delta^j f_l(X)$, окончательно найдем, что ряд (3) примет вид

$$u_l(z,X)=\frac{z^{l+2}}{(l+2)(l+1)}\sum_{j=0}^{\infty}\left(-\frac{z^{k+2}}{(k+2)^2}\right)^j\frac{\Gamma\left(1+\frac{l+2}{k+2}\right)\Gamma\left(1+\frac{l+1}{k+2}\right)}{\Gamma\left(j+1+\frac{l+2}{k+2}\right)\Gamma\left(j+1+\frac{l+1}{k+2}\right)}\Delta^j f_l(X). \quad (4)$$

Ряд (4) есть формальное решение задачи Коши уравнения (1). Аналогично, как и в случае однородного уравнения [3], из единственности определения коэффициентов $g_j^{(l)}(X)$, $j=1,2,\ldots$ следует, что если голоморфное решение уравнения (1) существует, то оно единственно.

Для исследования сходимости ряда (4) преобразуем его, используя функциональное уравнение для гамма-функции [1]

$$u_l(z,X)=\frac{z^{l+2}}{(l+2)(l+1)}\sum_{j=0}^{\infty}\left(-\frac{z^{k+2}}{(k+2)^2}\right)^j\frac{\Delta^j f_l(X)}{\prod_{i=1}^{j}\left(i+\frac{l+2}{k+2}\right)\prod_{i=1}^{j}\left(i+\frac{l+1}{k+2}\right)}. \qquad (5)$$

Произведение $\prod_{i=1}^{j}$ в соотношении (5) при $j=0$ считается равным 1. Легко проверяется, что при $k=0$ решение (5) совпадает с решением уравнения (2) для $L\equiv\Delta$, полученным в работе [4].

Используем оценку для $\left|\Delta^j f_l(X)\right|$, полученную в [3]

$$\left|\Delta^j f_l(X)\right| \le \frac{(2j)!}{\rho^{2j}} M_l m^j ,$$

где $A_\alpha : \left\{|x_k| \le r_k - |x_{k\alpha}|,\ k=1,2,\ldots,m,\ X_\alpha=(x_{1\alpha},x_{2\alpha},\ldots,x_{m\alpha})\in A\right\}$, $M_l=\max\limits_{A_\alpha}|f_l|$ и $\rho=\min\left(r_k-|x_{k\alpha}|, k=1,2,\ldots,m\right)$. Легко проверяется, что ряд (5) мажорируется рядом

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{|z|^{(k+2)j+l+2}}{(l+2)(l+1)(k+2)^{2j}\rho^{2j}}\frac{(2j)!M_l m^j}{\prod\limits_{i=1}^{j}\left(i+\dfrac{l+2}{k+2}\right)\prod\limits_{i=1}^{j}\left(i+\dfrac{l+1}{k+2}\right)},$$

который сходится при $|z|<\left(\dfrac{(k+2)^2\rho^2}{4m}\right)^{\frac{1}{k+2}}$. Отсюда следует, что ряд (5) сходятся абсолютно и равномерно в области

$$K_\alpha:\left\{|z|<\left(\frac{(k+2)^2\rho^2}{4m}\right)^{\frac{1}{k+2}}, x_1=x_{1\alpha}, x_2=x_{2\alpha},\ldots,x_m=x_{m\alpha}\right\}.$$

Пусть точка X_α пробегает весь полицилиндр A. Образуем объединение $V(A)$ всех K_α, $X_\alpha\in A$. Ряды из формулы (5) сходятся абсолютно и равномерно в $V(A)$. $V(A)$ содержит некоторую открытую в C^{m+1} окрестность множества A [4].

Из формулы (5) следует, что искомое частное решение уравнения (1) имеет вид

$$u_0(z,X)=\sum_{l=0}^{\infty}u_l(z,X)=$$

$$=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{z^{l+2}}{(l+2)(l+1)}\sum_{j=0}^{\infty}\left(-\frac{z^{k+2}}{(k+2)^2}\right)^j\frac{\Delta^j f_l(X)}{\prod\limits_{i=1}^{j}\left(i+\dfrac{l+2}{k+2}\right)\prod\limits_{i=1}^{j}\left(i+\dfrac{l+1}{k+2}\right)}. \tag{6}$$

Исследуем сходимость ряда (6). Как известно [5], на двойные функциональные ряды распространяется признак равномерной сходимости Вейерштраса. Поэтому можно использовать метод мажорантных рядов. Нетрудно убедится, что двойной ряд (6) мажорируется для любого $X \in A$ двойным рядом

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{|z|^{(k+2)j+l+2}}{(l+2)(l+1)(k+2)^{2j}\rho^{2j}}\frac{(2j)!Mm^{j}}{\prod_{i=1}^{j}\left(i+\frac{l+2}{k+2}\right)\prod_{i=1}^{j}\left(i+\frac{l+1}{k+2}\right)},$$

где $M = \max\limits_{l} M_l$, который сходится при $|z| < \left(\frac{(k+2)^2\rho^2}{4m}\right)^{\frac{1}{k+2}}$. Рассуждая аналогично, как и в случае доказательства сходимости ряда (5), получим, что двойной ряд (7) сходится в множестве *V(A)* абсолютно и равномерно. Область *V(A)* содержит некоторую открытую в C^{m+1} окрестность множества *A*.

Итак, для любой голоморфной функции $f(z, X)$ неоднородное уравнение (1) имеет голоморфное решение.

2. Рассмотрим более подробно случай трех независимых переменных *x, y, z*. Произведем замену переменных $\xi = x + iy$, $\eta = x - iy$. Тогда $\Delta \equiv 4\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}$.

Пусть $f(\xi,\eta) = ((t-\xi)(\tau-\eta))^{-1}$, где t,τ – комплексные параметры. Воспользовавшись формулой $\Delta^n f$, для этого случая полученной в [2], из формулы (4) получим

$$u_l(z,\xi,\eta) = \frac{z^{l+2}}{(l+2)(l+1)}$$
$$\times \sum_{j=0}^{\infty}\left(-\frac{4z^{k+2}}{(k+2)^2}\right)^j \frac{\Gamma\left(1+\frac{l+2}{k+2}\right)\Gamma\left(1+\frac{l+1}{k+2}\right)[\Gamma(j+1)]^2}{\Gamma\left(j+1+\frac{l+2}{k+2}\right)\Gamma\left(j+1+\frac{l+1}{k+2}\right)}\frac{1}{(t-\xi)^{j+1}(\tau-\eta)^{j+1}} \qquad (7)$$

Преобразуем ряд (7). Для этого используя интегральное представление бета-функции [1] при $\alpha = j+1$ и $\beta = \frac{l+2}{k+2}$, получим, что

$$\frac{\Gamma\left(1+\frac{l+2}{k+2}\right)}{\Gamma\left(j+1+\frac{l+2}{k+2}\right)}=\frac{\frac{l+2}{k+2}\Gamma\left(\frac{l+2}{k+2}\right)}{\Gamma\left(j+1+\frac{l+2}{k+2}\right)}=\frac{\frac{l+2}{k+2}}{\Gamma(j+1)}\int\limits_0^1 s^j(1-s)^{\frac{l+2}{k+2}-1}ds.$$

Тогда ряд (7) примет вид

$$u_l(z,\xi,\eta)=\frac{z^{l+2}}{(k+2)(l+1)}\frac{1}{(t-\xi)(\tau-\eta)}$$

$$\times\int\limits_0^1(1-s)^{\frac{l-k}{k+2}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(1+\frac{l+1}{k+2}\right)[\Gamma(j+1)]^2}{\Gamma(j+1)\Gamma\left(j+1+\frac{l+1}{k+2}\right)}\left(-\frac{4}{(k+2)^2}\frac{z^{k+2}s}{(t-\xi)(\tau-\eta)}\right)^j ds$$

$$=\frac{z^{l+2}}{(k+2)(l+1)}\frac{1}{(t-\xi)(\tau-\eta)}\int\limits_0^1(1-s)^{\frac{l-k}{k+2}}F\left(1,1;1+\frac{l+1}{k+2};\gamma\right)ds,$$

где $\gamma=-\frac{4}{(k+2)^2}\frac{z^{k+2}s}{(t-\xi)(\tau-\eta)}$ и $F(a,b;c;t)$ – гипергерметрическая функция Гаусса.

Итак, получили решение уравнения (1), которое выражается через интеграл гипергеометрической функции.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Бейтмен, А.Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра*, Наука, Москва, 1973.

[2] Д. Корсакене, О задаче Коши для вырождающихся уравнений второго порядка, Диф. уравнения, **33**(4)(1997), 560-562.

[3] Д. Корсакене, Задача Коши для вырождающегося эллиптического уравнения с многими независимыми переменными, *Liet. Matem. Rink.*, **37**(3)(1997), 359-366.

[4] А.И. Янушаускас, *Аналитическая теория эллиптических уравнений*, Наука СО, Новосибирск, 1979.

[5] А.И. Янушаускас, *Двойные ряды*, Наука СО, Новосибирск, 1980.

Košy uždavinys antrosios eilės nehomogeninei išsigimusiajai elipsinei lygčiai

D. Korsakienė

Nagrinėjamas Košy uždavinys nehomogeninei elipsinei lygčiai daugiamatėje kompleksinėje erdvėje. Sprendinys randamas laipsnine eilute. Trimatėje erdvėje sprendinys išreiškiamas hipergeometrine funkcija.