

Puankarė hipotezė: trumpa apžvalga

Daniele Ettore Otera  

Duomenų mokslo ir skaitmeninių technologijų institutas, Vilniaus universitetas, Lietuva 

 Korespondentas: daniele.otera@mif.vu.lt

Įteiktas 2025 birželio 20; publikuotas 2025 gruodžio 21

Santrauka. Puankarė hipotezė – 120 metų senumo prancūzų matematiko Anrio Puankarė suformuluota problema – yra vienas pagrindinių šiuolaikinės matematikos iššūkių. Joje teigiama, kad bet kurią trimatę erdvę, kuri yra uždara ir be skylių, galima deformuoti į trimatę sferą. Nors hipotezė buvo išspręsta šio amžiaus pradžioje, ji vis dar išlieka paslaptinga, patraukli ir intriguojanti. Tai problema, kurią verta toliau išsamiai tyrinėti. Šio straipsnio tikslas, viena vertus, yra trumpai apžvelgti tai, ką šiandien žinome apie Puankarė hipotezę ir su ja susijusias problemas trimatėje erdvėje, ir, kita vertus, paaiškinti, kodėl ji ilgą laiką buvo (ir dar yra) matematikų dėmesio centre.

Raktiniai žodžiai: daugdaros; 3-matė sfera; geometrinės struktūros; kreivis

AMS: 01A60, 57R60, 53-03

1 Įvadas

1900 m. Paryžiuje įvyko antrasis tarptautinis matematikų kongresas, kuriame Davidas Hilbertas suformulavo garsųjį 23-jų tuo metu neišspręstų uždavinių sąrašą. Praėjus šimtmečiui po šios konferencijos, naujojo tūkstantmečio proga Klėjaus matematikos institutas (JAV, Bostonas) išrinko septynis naujus sudėtingus neišspręstus matematikos uždavinius ir už kiekvieno iš jų išsprendimą skyrė vieno milijono JAV dolerių premiją. Tūkstantmečio premijos buvo paskelbtos 2000 m. gegužės 24 d. Paryžiuje (beje, aš dalyvavau renginyje), o tarp tų naujų uždavinių išsiskyrė Puankarė hipotezė (kurią lengva išsakyti) ir visiems žinoma Rymano hipotezė, suformuluota 1859 m., vienintelė neišspręsta problema, kuri jau buvo įtraukta į 1900 m. Hilberto 23 uždavinių sąrašą.

Iki šiol buvo išspręstas tik vienas iš šių tūkstantmečio premijos uždavinių – Puankarė hipotezė. Šią problemą Puankarė išsamiai išnagrinėjo 1904 m. savo gerai žinoma-

me darbe [5], paskelbtame žurnale „Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo“ (tarp kitko, universitete kuriame aš mokiausi). Po (beveik) šimto metų, 2003 m. rusų matematikas Grigorijus Perelmanas [4] įrodė, kad ši hipotezė teisinga. Šimtmečio senumo problemos išsprendimas ir tai, kad Perelmanas atsisakė 1 mln. JAV dolerių vertės tūkstantmečio premijos, atkreipė plačiosios visuomenės dėmesį būtent į šią problemą. Pavyzdžiui, žurnalas „Science“ pripažino Puankarė hipotezės įrodymą metų atradimu ir paskelbė jį ant viršelio.

Minint 120-ąsias šio įdomaus klausimo suformulavimo metines, pabandyčiau ne per daug sudėtingai paaiškinti šios problemos matematiką ir tai, kas susiję su jos sprendimu.

Matematika yra labai tarpusavyje susijęs mokslas ta prasme, kad jos dalykai yra glaudžiai susiję vieni su kitais (ir su kitais mokslais, pavyzdžiui, fizika, informatika, inžinerija ir t. t.). Egzistuoja tam tikra matematikos architektūra, o objekto ar problemos įdomumas labai priklauso nuo jo padėties šioje architektūroje, nuo jo ryšių su likusia pastato dalimi gausos ir stiprumo. Dėl savotiško stebuklo, apie kurį daug kalbėta ir rašyta, bet kuris vis dar toli nuo mūsų supratimo, matematinio objekto svarbą pačioje matematikoje paprastai liudija tai, kad gamta taip pat jį tam tikru būdu naudoja.

1.1 Daugdaros

Norint paaiškinti ir pakomentuoti Puankarė hipotezę ir jos vaidmenį matematikoje ne specialistų auditorijai, tenka pradėti nuo pagrindų. Pirmiausia turime apibrėžti ir aptarti pagrindines mus dominančias temas – n -*mates daugdaras* (angl. *manifolds*). Dėl paprastumo daugdara laikysime objektą, nagrinėjamą N -matėje (N didesnis nei n) erdvėje. Vienmatė daugdara ($n = 1$) yra tiesė, apskritimas arba kreivė (pavyzdžiui, mūsų standartinėje Euklidinėje plokštumoje), o dvimatės daugdaros ($n = 2$) yra tai, ką paprastai vadiname *paviršiais* (mūsų 3-matėje erdvėje $\mathbb{R}^3$). Pasitelkę daugiau fantazijos ir abstrakcijos, galime įsivaizduoti 3-matę daugdarą M kaip erdvės, kurios dimensija $N \geq 4$ (įsivaizduokite $\mathbb{R}^4$ kaip Einšteino erdvėlaikį), poerdvį, tokį, kad lokaliai jis atrodo kaip mūsų 3-matė erdvė (kaip ir, pavyzdžiui, lokalus paviršiaus gabalas primena realiosios plokštumos gabalą), ir t. t. bet kurio natūraliojo skaičiaus n atveju.

Pasirodo, kaip pirminiai ar kompleksiniai skaičiai, taip pat ir daugdaros yra svarbios šiuolaikinės matematikos architektūros objektai. Iš tikrųjų jie yra pagrindiniai matematikos šakos, vadinamos *topologija* (pažodžiui – mokslas apie „vietas ir formas“), blokai, ir kuriuos matematikai norėtų visiškai suprasti ir klasifikuoti. O Puankarė hipotezė yra kertinis šio uždavinio akmuo.

Tiesą sakant, neatsitiktinai ji buvo lyginama su Rymano hipoteze (kuri yra susijusi su pirminių skaičių pasiskirstymu – tema, intensyviai nagrinėjama Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultete) arba su garsiąja Pjero Ferma paskutine teorema, kurią ne taip seniai įrodė Endriu Vailsas. Pastaroji yra susijusi su algebrine skaičių teorija – viena iš pagrindinių VU MIF'o mokslinių tyrimų sričių.

Grįžtant prie daugdarų sąvokos, šiek tiek pamastę turėtume suprasti, kad kaip taškui kreivėje identifikuoti pakanka vienos koordinatės, taip taškui paviršiuje identifikuoti reikalingi du skaičiai (koordinatės). Pavyzdžiui, Žemės paviršiuje (kuris yra dvimatė sfera) mums reikia geografinės ilgumos ir geografinės platumos. Beje, tai,

kad šis parametrizavimas turi anomalijų (pvz., visi dienovidiniai susitinka šiaurės ir pietų ašigaliuose, todėl ilguma nebėra gerai apibrėžta), rodo pagrindinį topologinį faktą: sfera S^2 topologiškai skiriasi nuo toro T^2 (techniškai – nėra „homeomorfinė“ torui), kuris atrodo kaip padangos paviršius (paaikškinimą žr. toliau).

Galima įsivaizduoti, kad sfera S^2 nėra homeomorfinė Euklidinei erdvei $\mathbb{R}^2$, tačiau tai lengviau suprasti, nes intuityvus faktas, kad sfera yra „uždara“ paviršius, o plokštuma $\mathbb{R}^2$ yra „atvira“, atitinka matematinį skirtumą, kuris yra gerai užkoduotas (apie daugdarą sakoma, kad ji yra *uždara*, jei neturi krašto ir užima baigtinę erdvės sritį).

Šio skyriaus pabaigoje pateiksime homeomorfizmo sąvoką. Matematikoje, kai reikia tirti objektų aibę („kategoriją“), panaudojama tam tikra funkcija, kuri gali palyginti du šios kategorijos objektus, t. y. ryšys tarp objektų, kuris pasako, kada du iš jų turi arba neturi tų pačių savybių (kada jie yra lygūs, tiksliau „ekivalentūs“, toje kategorijoje). Pavyzdžiui, Euklido erdvėse postūmiai, posūkiai, kongruencijos, izometrijos ir pan. *Homeomorfizmai* yra tokie ekvivalentumai daugdarų (plačiau – „topologinių erdvių“) kategorijoje. Visų pirma tai yra funkcijos, kurios išsaugo visas tam tikros daugdaros (erdvės) topologines savybes. Pasirodo, kad dvi daugdaros yra homeomorfinės, jei galima „tolydžiai“ (t. y. be pjaustymo ar kljavimo) deformuoti pirmąją daugdarą į antrąją; ir tokiu atveju jos yra tas pats objektas mūsų kategorijoje (t. y. topologiniu požiūriu). Kalbant labiau matematine kalba, homeomorfizmas yra abipus vienareikšmė ir abipus tolydi transformacija (atvaizdis).

1.2 Nuo rutulio iki kamuolio

Skaitytojas neabejotinai pažįsta bent vieną trimatę daugdarą, būtent mūsų trimatę erdvę $\mathbb{R}^3$, o matematikai žino, kaip sukonstruoti daugybę kitų.

Iš tiesų ne tik matematika, bet ir mechanika ar fizika verčia mus pereiti nuo dimensijos 2 prie 3, 4 ar aukštesnės. Tai objektai, panašūs į paviršius, tačiau juose taškui identifikuoti reikia 3, 4 ar daugiau (vietinių) koordinačių. Pavyzdžiui, trijų kūnų, veikiamų sunkio jėgos, judėjimą galima nagrinėti kaip 18-matę daugdarą, kurioje kiekvieną kūną apibrėžia trys erdvės koordinatės ir trys greičio koordinatės.

Jei dvimatę sferą įsivaizduosime kaip trimačio rutulio paviršių, tuomet sferas galime įsivaizduoti ir trijų, keturių ar daugiau matmenų. Taip suvokiame, kad n -matė sfera yra $n+1$ -mačio rutulio išorinis paviršius (arba „kraštas“). Be to, galime suvokti, kad iš visų uždarų daugdarų paprasčiausia tirti n -matę sferą.

Tiksliau tariant, n -matė sfera S^n yra Euklidinės erdvės $\mathbb{R}^{n+1}$ taškų, kurie nuo koordinačių pradžios taško nutolę atstumu 1, aibė, o elementari analizinė geometrija mums padeda pateikdama aiškia jos lygtį

$$S^n = \{x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1}: x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

n -matė sfera kartu su savo vidumi vadinama $n+1$ -mačiu rutuliu B^{n+1} , kurio išraiška Dekarto koordinatėse yra

$$B^{n+1} = \{x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1}: x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Dabar įsivaizduokime sferą S^2 , panašią į Žemės paviršių, be šiaurinio ašigalio, ir pažymėkime ją $S^2 - N$. Pasitelkus šiek tiek daugiau vaizduotės, nesunku pastebėti, kad ši pradurta sfera tam tikra prasme yra „susitraukianti“. Tai reiškia, kad kiekvienas

$S^2 - N$ taškas p priklauso vienam dienovidiniui, todėl jis gali nenutrūkstamai slinkti išilgai dienovidinio, kol pasieks pietų ašigalį S .

Tą patį galima padaryti ir su bet kuria n -mate sfera. Net ir šiuo atveju $S^n - N$ „dienovidiniai“ susitinka tik ties pietų ašigaliu S .

Tačiau galime įsivaizduoti ir kai ką sudėtingesnio – tam tikras Σ^n sferas, kuriose nuolatinis srautas iš $\Sigma^n - N$ eina link pietų ašigalio S , tačiau daug sudėtingiau, kirsdamas ir susikirsdamas ne tik S , bet ir kitose vietose. Tokios „sferų rūšys“ vadinamos *homotopinėmis sferomis* (tai objektai, kurie panašūs į sferas, bet skiriasi savo forma). Kitaip tariant, homotopinė sfera yra uždara daugdara Σ^n tokia, kad $\Sigma^n - P$ galima tolydžiai deformuoti (visada išliekant $\Sigma^n - P$) į tašką (kaip ir normaliosios sferos atveju).

2 Problemos formuluotė

Puankarė hipotezė teigia, kad kiekviena 3-matė homotopinė sfera Σ^3 yra homeomorfinė sferai S^3 [5, 6]. Kitaip tariant, tai reiškia, kad visada galima rasti iš $\Sigma^3 - P$ (šiaurinio poliaus) link pietinio poliaus S nenutrūkstamą srautą be susikirtimų, persikirtimų ar sutapimų, išskyrus pabaigą (būtent ties S). Tai taip pat atitinka teiginį, kad $\Sigma^3 - P = \mathbb{R}^3$ (S^3 atveju tai tampa aišku panaudojus vadinamąją „stereografinę projekciją“).

Tiksliau sakant, paties Puankarė formuluotė, nors ir lygiavertė ką tik minėtai, buvo šiek tiek kitokia: Puankarė iš tiesų spėjo, kad vienintelė uždara ir „vienajungė“ (angl. *simply connected*) trimatė daugdara yra (homeomorfinė) S^3 . (Daugdara V vadinama *vienajunge* – nauja topologinė sąvoka, kurią įvedė pats Puankarė – jei kiekvieną uždara kreivę (t. y. kilpą) galima tolydžiai deformuoti į tašką, išliekantį V viduje).

Atkreipkite dėmesį, kad šio skyriaus pradžioje pateikto pirmojo teiginio privalumas yra tas, kad jis galioja kiekvienai dimensijai. Visų pirma, galima suformuluoti apibendrintą Puankarė hipotezę, kuri sako, kad bet kurio natūraliojo n atveju homotopijos sfera Σ^n yra (homeomorfinė) S^n . Tačiau žingsnis nuo $n = 3$ prie bet kokio n , atsirado praėjus maždaug trisdešimčiai metų po Puankarė, be to, iki XX a. šeštojo dešimtmečio nebuvo jokios tolesnės pažangos bet kokios aukštesnės nei 2 dimensijos atveju.

Kita vertus, nors ir suformuluotas visai kitaip, $n = 2$ atvejis, kuris yra daug paprastesnis, buvo žinomas jau nuo XIX a. vidurio. Tiksliau, 2 matmenų atveju atitinkamas teiginys yra toks, kad bet kuriame uždare paviršiuje, kuris skiriasi nuo 2-matės sferos S^2 , galima rasti bent vieną kilpą, kurios negalima tolydžiai sutraukti į tašką. Iš tikrųjų šis rezultatas išplaukia iš daug išsamesnės ir gilesnės teoremos – uždarų ir jungiųjų 2-mačių paviršių klasifikacijos, kuri įvairiomis formomis buvo įrodyta nuo 1860 m. ir kuri teigia, kad kiekvienas orientuojamas kompaktinis paviršius yra homeomorfinis sferai su tam tikru skaičiumi prijungtų „rankenų“ (angl. *handles*).

2.1 TOP ir DIFF kategorijos

Grįžkime prie sferos, kurią įsivaizduojame kaip mūsų gaublio paviršių. Akivaizdu, kad šis objektas yra homeomorfinis, t. y. topologiškai lygiavertis elipsoido (regbio kamuolio) paviršiui ir taip pat kubo paviršiui (nes galime įsivaizduoti žaislinį tešlos rutulį,

kuri, jo nesulaužę, galime modeliuoti kaip elipsoidą arba kubą). Tačiau elipsoidas, kaip ir rutulys, yra lygus, glodus, o kubo paviršius toks nėra, nes yra briaunų ir smaigalių.

Matematiškiau kalbant, sakome, kad sferos ir elipsoido lygybę užtikrina funkcijos, turinčios tolydžias išvestines. Tokios funkcijos vadinamos *difeomorfizmais* (diferencijuojamaisiais homeomorfizmais), o tai yra siauresnė sąvoka nei homeomorfizmas. Sfera ir elipsoidas yra ir homeomorfiniai, ir difeomorfiniai. Priešingai, sferos ir kubo paviršiaus topologinis ekvivalentumas įmanomas tik per paprastas tolydžias funkcijas, kurios neturi išvestinių: šie du paviršiai yra homeomorfiniai, bet ne difeomorfiniai. Sfera yra glodi ir diferencijuojama, o kubas – ne.

Jei nagrinėsime tik daugdaras, kurių dimensija mažesnė arba lygi 3, šis skirtumas bus nereikalingas, nes tokiais atvejais topologinių ir diferencijuojamų daugdarų kategorijos sutampa (t.y. žinome, kaip suapvalinti smaigalius). Ir atvirkščiai, kai dimensija didesnė nei 3, paaiškėja, kad yra kliūčių apvalinant objektus, ir egzistuoja nediferencijuojamųjų daugdarų pavyzdžių. Pavyzdžiui, 1956 m. garsus matematikas Džonas Milnoras įrodė, kad 7-matėje sferoje koegzistuoja 28 diferencijuojamos struktūros, kurios nėra tarpusavyje difeomorfines. Todėl egzistuoja „egzotiškos“ sferos, t.y. sferos su diferencialinėmis struktūromis, besiskiriančios nuo standartinių [8].

Taigi tuo metu vyravo bendra nuostata, kad, didėjant dimensijai, gali didėti ir sunkumai. Tačiau apie 1960 m. Stivas Smeilas suprato, kad yra priešingai, ir įrodė apibendrintą Puankarė hipotezę nemažesnės nei 5 dimensijos atveju: homotopinė sfera Σ^n , $n \geq 5$, (t.y. daugdara, kuri yra homotopiskai ekvivalentiška sferai S^n) yra izomorphinė (homeomorphinė arba difeomorphinė) standartiniai sferai [2, 7].

Priežastis, dėl kurių sunkumai mažėja, labai supaprastintai galima paaiškinti taip: didelių dimensijų atvejais yra daug tuščios erdvės manevruoti, kurti sprendimams reikalingas geometrinės konstrukcijas bei sudaryti įrodymo reikalaujančią lygybę. Tuo tarpu, esant mažesnei nei 3 dimensijai (1 arba 2), vietos uždaviniams kurti nepakanka. Galiausiai, 3-mačiu atveju, būtent Puankarė išeities taške, yra ne tik problemų, bet ir labai mažai erdvės veikti.

Ribinė situacija yra dimensija $n = 4$. Tai atskiras pasaulis, labai besiskiriantis nuo kitų (2, 3 ar daugiau matmenų). Šiuo atveju iš tikrųjų prireikė didelių pastangų, kad būtų įrodyta Puankarė hipotezė: 1982 m. Maiklas Frydmanas įrodė, kad Σ^4 topologiškai lygi S^4 . Tiesą sakant, Frydmano darbo dėka šiandien žinome, kad būtent 4 matmenyse (mūsų erdvėlaikio dimensijoje) yra didelis neaiškumas, kuo skiriasi topologinis ir diferencialinis atvejai. Glodžiuoju 4-mačiu atveju Puankarė hipotezė tebėra atvira, toli gražu neišspręsta problema.

Taigi apibendrintoji Puankarė hipotezė gali būti teisinga arba klaidinga skirtingose kategorijose (TOP arba DIFF) priklausomai nuo dimensijos. Tai žinome dėka kelių gerbiamų matematikų, tokių kaip Džono Milnoro, Stivo Smeilo, Maiklo Frydmano ir Grigorijaus Perelmano [2, 3, 4, 7, 8]. Visi šie mokslininkai buvo apdovanoti Fildso medaliu, kuris yra prestižiškiausias apdovanojimas matematikos srityje, Nobelio premijos atitikmuo.

Visų pirma, TOP (t.y. topologinėms daugdaroms) kategorijoje apibendrinta Puankarė hipotezė yra teisinga visose dimensijose! DIFF (t.y. diferencialinėms daugdaroms) kategorijoje ji teisinga, kai dimensija lygi 1, 2, 3, 5 ir 6, vis dar atvira 4 matmenyse, o kitais atvejais klaidinga.

Atkreipkite dėmesį, kad nors pirminis Puankarė spėjimas 3-mačiu atveju buvo

išspręstas praėjus šimtmečiui nuo jo pirmojo suformulavimo, per visą tą laiką buvo sukurti ir išbandyti įvairūs problemos sprendimo būdai, nes ji susijusi su įvairiomis matematikos sritimis: nuo grupių teorijos iki diferencialinių lygčių, nuo fizikos iki bendrojo reliatyvumo. Nors sprendimo ieškota šimtą metų, įrodinėjant sukurtų metodų dėka buvo gauta daug naujų svarbių rezultatų [1, 4, 6, 7, 9, 10]. Trumpai tariant, visi šiai hipotezei skirti darbai pagilino 3-mačių daugdarų pasaulio supratimą.

3 Geometrinės struktūros

Puankarė hipotezė yra grynai topologinė problema. Vis dėlto visos topologų pastangos ją įrodyti buvo nesėkmingos, ir iki šiol nėra jokio topologinio įrodymo. Todėl, norint išspręsti šią problemą, reikėtų palikti topologinę sistemą ir taikyti geometrinis arba analizinius metodus, kad turėtume daugiau priemonių jai spręsti. Viena iš tinkamiausių strategijų – aprūpinti daugdaras tam tikromis geometrinėmis struktūromis. Ir iš tikrųjų būtent šis metodas galiausiai pasirodė esąs sėkmingas.

Šis kelias labai susijęs su kitu paties Puankarė darbu, jo garsiąja Uniformizavimo teorema. Šis rezultatas susijęs su paviršiais (taigi 2-mačiu atveju) ir, grubiai tariant, sako, kad kiekviename paviršiuje galime apibrėžti geometriją (t. y. atstumų ir kampų matavimo būdą), kuri lokaliai yra panaši į vieną iš trijų klasikinių geometrijų su pastoviu kreiviu: Euklidinę geometriją (tą, kurios mokomės mokykloje, ir plokštumos kreivis yra nulinis), neeuklidinę geometriją, vadinamą Lobačevskio hiperboline geometrija (tą, kurioje kelios tiesės, lygiagrečios tam tikrai tiesei, eina per tą patį tašką, o plokštumos kreivis -1), ir apvalios sferos geometriją (vadinamą elipsine geometrija su teigiamu kreiviu $+1$).

Dabar kyla akivaizdus klausimas: ar galime kažką panašaus pasakyti 3 matmenų atveju? Septintajame dešimtmetyje didysis amerikiečių matematikas Viljamas Tersonas [9] nupiešė labai įspūdingą programą siekdamas „geometrizuoti“ visas uždaras trimates daugdaras, kaip tai padarė Puankarė dviejų matmenų atveju. Skirtumas tik tas, kad trimačių atveju galimų geometrijų turėtų būti ne 3, o 8, ir tarp jų svarbiausia – hiperbolinė.

3.1 Kreivis

Pabandykime būti tikslesni. Norint suteikti daugdarai geometriją, natūralu kiekviename daugdaros taške nurodyti, kaip apibrėžiamas atstumas tarp dviejų labai artimų taškų. Matematiškai tai reiškia, kad kiekviename taške reikia nurodyti „metrinį tenzorį“. Šis tenzorius (vektoriaus sąvokos apibendrinimas) įvestas XIX a. vokiečių matematiko Bernhardo Rymano, naudojamas ilgiams, kampams, plotams, tūriams ir t. t. duotoje daugdaroje nustatyti. n -matės daugdaros metrinis tenzorius – tai n^2 skaičių matrica, kuri naudojama daugdaros kreiviui apskaičiuoti.

2-mačio paviršiaus kreivumas yra intuityvi sąvoka, kurią apie 1830 m. sugriežtino vokiečių matematikas Karlas Frydrichas Gausas. Jis apibrėžė kreivį R kaip skaičių, gaunamą išreiškus paviršiaus kreivį $R(p)$ jo taške p . Šis skaičius apibrėžia ir matuoja „atotrūkį“ tarp paviršiaus geometrijos, notoli taško p , ir Euklido klasikinės geometrijos (standartinės plokštumos geometrijos). Taigi dvimatės sferos kreivis yra teigiamas, plokštumos (arba cilindro, arba kūgio) kreivis yra lygus nuliui, o balninio paviršiaus kreivis yra neigiamas.

Jei kreivis nepriklauso nuo paviršiaus taško p , kaip šiuose pavyzdžiuose, matematikai kalba apie elipsinę (arba sferinę) geometriją, Euklido geometriją ir hiperbolinę geometriją. Pavyzdžiui, šios trys skirtingos geometrijos skiriasi trikampiais: sferos paviršiaus trikampiai yra stori (vidaus kampų suma didesnė už 180°), plokštumos – standartiniai, o hiperboliniu atveju – ploni (labai smailūs kampai, kraštinės išlenktos į vidų).

Apie 1850 m. Rymanas apibendrina kreivio sąvoką bet kokios dimensijos n daugdaroms: kai n yra didesnis arba lygus 3, kreivis jau nebe skaičius kaip Gauso atveju, bet tenzorius. Tarkime, kad daugdaros V^n taško p aplinkoje pasirinkome lokalią koordinatų sistemą $x_1, x_2, \dots, x_n$. Rymano kreivis V^n taške p išreiškiamas n^4 skaičių lentele. Kiekvienas šios lentelės skaičius tiesiogiai priklauso nuo Rymano metrikos, apibrėžtos pačioje daugdarėje, ir jos išvestinių.

Ilgą laiką Rymano idėjos atrodė pernelyg abstrakčios, nelabai aiškos, tačiau būtent šiomis sąvokomis grindžiamas garsusis bendrasis reliatyvumas, didysis Einšteino šedevras. Tai tik įrodo, kad galiausiai ir gryna matematika gali būti panaudota kažkam svarbiam, net jei tai nėra iš karto akivaizdu!

3.2 Geometrizzacijos hipotezė

Praėjus daugiau nei šimtmečiui po Rymano naujovių, septintajame dešimtmetyje, geometras Viljamas Polas Terstonas pasiūlė naują programą, savotišką klasifikacijos projektą, kurio siekis – įrodyti Puankarė hipotezę ir iki galo suprasti uždarų 3-mačių daugdarų aibę.

Terstonas pradėjo pabrėžti aštuonias 3-mates geometrijas, kurios yra ypač simetriškos, iš kurių trys yra jau apibrėžtos paviršių atveju. Taigi jis sukūrė vadinamąją geometrizzavimo hipotezę, pagal kurią bet kurią 3-matę uždarą daugdarą unikaliu būdu galima suskaidyti į baigtinį skaičių dalių, kurių kiekviena priklauso šiai 8-jų geometrijų aibei. Tai yra minėtosios Puankarė uniformizacijos teoremos, skirtos paviršiams, apibendrinimas 3-mačiu atveju. (Už savo darbus topologijos ir 3-matės geometrijos srityje Terstonas taip pat buvo apdovanotas Fildso medaliu).

Geometrizzacijos hipotezė yra daug bendresnė nei Puankarė hipotezė. Ji yra išsami sistema-struktūra skirta klasifikuoti ir suprasti visas trimačias daugdaras, ne tik sferą. Be kita ko, Terstono hipotezė teigia, kad iš 8-ų specialiųjų geometrijų vienintelė, kurią gali turėti uždara ir vienajungė trimatė daugdara, yra pastovaus kreivio $+1$ geometrija. Taigi Puankarė hipotezę galima įrodyti ir sprendžiant Terstono hipotezę, kadangi yra žinoma, kad uždara ir vienajungė trimatė daugdara, turinti pastovaus kreivio $+1$ metriką, yra topologiškai ekvivalenti sferai.

3.3 Riči srautas

Pradėsime nuo daugdaros, turinčios metriką. Ar įmanoma rasti procesą, kuris pakeistų jos geometriją taip, kad ji taptų kuo simetriškesnė?

Idėja yra nuolat deformuoti metriką kiekviename daugdaros taške p taip, kad vidutinis kreivis taške p sumažėtų. Tai mus atveda prie R. Hamiltono darbo, atlikto aštuntajame dešimtmetyje [1]. Šis mokslininkas įvedė netiesinę dalinių išvestinių lygtį, vadinamą „Riči srautu“ (angl. *Ricci Flow*), kuri, pasirodo, yra labai naudinga [3].

Panagrinėkime 3-matę daugdarą su nuo laiko priklausančia metrika. Kiekvienu laiko momentu metrikai galime priskirti tam tikrą kreivį, vadinamą Riči kreiviu, kuris

atitinka tam tikrą Rymano kreivių vidurkį. Metriką ir kreivį, kurie yra du vienodo tipo tenzoriai, galima įrašyti į lygtį, kuri nurodo, kad momentinis metrikos kitimo greitis atitinka priešingą Riči kreivio kitimo greitį.

Įvedus Riči srauto lygtį, metrika laikui bėgant tampa taisyklingesnė ir simetriškesnė. Pavyzdžiui, Hamiltonas įrodė, kad 2-mačiu atveju bet kokios paviršiaus metrikos Riči srautas per baigtinį laiką evoliucionuoja link pastovaus kreivio metrikos.

3-mačiu atveju viskas daug sudėtingiau, nes srautas gali „sprogti“, ir gali atsirasti begaliniai dydžiai. Hamiltono programą, kurią užbaigė Perelmanas, sudaro tik įrodymas, kad dėl šių sproгимų daugdara V^3 suskyla į gabalus, kuriuose Riči srautas gali toliau vystytis, ir kad po baigtinio laiko ir baigtinio sproгимų skaičiaus gaunama pradinė daugdara, išskaidyta į gabalus, kurių kiekvienas turi vieną iš 8-ų Terstono geometrijų [4].

Galiausiai Perelmanui pavyko, pasitelkus puikius netiesinės analizės metodus, kontroliuoti Riči srauto sproгимus ir įrodyti, kad visas Riči srauto procesas užgęsta per baigtinį laiką. Taip jis užbaigė Hamiltono strategiją ir įrodė Terstono geometrizationą 3-matėms daugdaroms, ir dėl to buvo išspręsta Puankarė hipotezė taip pat!

Tačiau, kaip matėme, labai „paprastą“ topologinę problemą pavyko išspręsti tik netiesiogiai, labai tiksliais analitiniais ir geometriniiais metodais.

4 Išvada

Sprendžiant Poincarė hipotezę, iškilo daug naujų klausimų, idėjų, hipotezių ir neišspręstų problemų. Bet matematikai „atviromis problemomis“ vadina tik tuos uždavinius, su kuriais ilgą laiką nesėkmingai kovojo ir dėl kurių nėra tikri, ar jie yra teisingi. Tačiau atvira problema nėra tik paprasta neišspręsta problema. Iš tikrųjų kiekvienais metais matematikai įrodo įvairiausių naujų rezultatų, ir kiekvienais metais iškyla daug naujų uždavinių; tačiau retas iš jų gauna tokį pavadinimą. Atvira problema – tai problema, kuri laikoma unikalia, nepasiekiamą, sunkiai išsprendžiama, bet kurios supratimas yra esminis ją supančių tyrimų sričių plėtrai – taip kaip Poincarė hipotezę.

Be atvirų problemų tikriausiai nebūtų didžiųjų tyrėjų nei pirmaujančių mokslininkų, tik darbininkai ir technikai. Todėl atviros problemos ir neišsprendžiami spėjimai yra labai sveikintini – tai mokslo pažangos variklis!

Literatūra

- [1] R. Hamilton. Three-manifolds with positive Ricci curvature. *J. Differ. Geom.*, **17**(2):255–306, 1982.
- [2] J. Milnor. *The Poincaré Conjecture 99 Years Later: A Progress Report*. Unpublished. Available at: <https://www.math.stonybrook.edu/~jack/PREPRINTS/poiproof.pdf>.
- [3] J.W. Morgan. Recent progress on the Poincaré conjecture and the classification of 3-manifolds. *Bull. Am. Math. Soc.*, **42**:57–78, 2004.
- [4] J.W. Morgan, G. Tian. Ricci flow and the Poincaré conjecture. In *Clay Mathematics Monographs*, volume 3. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.
- [5] H. Poincaré. Cinquième complément à l'analysis situs. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **18**:45–110, 1904.
- [6] H. Poincaré. Papers on topology: analysis situs and its five supplements. In *History of Mathematics*, volume 37, 2010.

- [7] S. Smale. Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than four. *Annals Math.*, **74**:391–406, 1961.
- [8] J. Stillwell. Poincaré and the early history of 3-manifolds. *Bull. Am. Math. Soc.*, **49**(4):555–576, 2012.
- [9] W.P. Thurston. Three-dimensional geometry and topology, vol. 1. In *Princeton Mathematical Series*, volume 35. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997.
- [10] J.H.C. Whitehead. A certain open manifold whose group is unity. *Q. J. Math., Oxf. Ser.*, **6**:268–279, 1935.

SUMMARY

A brief overview of the Poincaré conjecture

D.E. Otera

The Poincaré conjecture – a problem formulated 120 years ago by the French mathematician Henri Poincaré, and solved at the beginning of this century by G. Perelman – has been one of the major issues of modern mathematics. It simply states that any three-dimensional space which is closed and without holes can be deformed into a three-dimensional sphere. The purpose of this article is to briefly review what we know today about the Poincaré conjecture and its related problems in dimension 3.

Keywords: manifolds; 3-dimensional sphere; geometric structures; curvature