ISSN 1392-1258. EKONOMIKA. 1995. 39

ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В АНАЛИЗЕ ТЕНДЕНЦИИ РАЗВИТИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

МАРТИШЮС СТАСИС

1. Эконометрические модели как средство оценки динамики

Расчеты прогнозирования следует строить при сохранении возможности постоянного учета изменчивости хозяйственного процесса, старения информации, неодинакового его значения для предвидения будущего. В динамических ситуациях, где детерминированный характер общественных явлений приобретает вид целенаправленных социальных действий, традиционные расчеты оценки динамики и прогнозирования малоэффективны. По нашему мнению, тут шире следует применять эконометрические модели (в дальнейшем – ЭМ) причинной зависимости.

Известно, что только система показателей может более или менее точно описывать конкретную реальную экономическую ситуацию. Поэтому составление системы показателей, их выбор, использование того или иного способа объединения – очень важные этапы при построении ЭМ. Однако не любой ряд показателей можно назвать системой. Нам кажется, что при выполнении научного экономического анализа системой целесообразно называть только такой их ряд, в котором каждый из показателей занимает определенное место, дополняет, а не дублирует друг друга, находится в строго определенном соотношении с другими показателями. Построение такой системы возможно только путем глубокого изучения тех конкретных хозяйственных мероприятий, которые обобщаются данными показателями.

Особенно усложняется процесс моделирования, когда объектом изучения становится сложная экономическая категория, например, эффективность общественного производства. В этом случае следует как установить систему результативных показателей, так и выделить для каждого из них специфические и общие для всех факторные (экзогенные) показатели. Полное описание всех причинных связей требует составления моделей, состоящих из множества уравнений, так как характер связи, форма зависимости между обобщающими показателями очень различны. Можно выделить прямые и косвенные, цепные и обратные связи. Однако не все они имеют строго причинный характер; причинность есть лишь одна из таких форм связи, бесспорно, наиболее важная, на которую следует обратить основное внимание при составлении ЭМ.

В экономической теории, в статистической науке пока отсутствует обоснованная типология причинных отношений. Для разработки теории эконометрического моделирования считаем необходимым выделить следующие типы причинных отношений: цепные системы причинно-следственных связей, системы с обратной связью.

При анализе причинных отношений I типа рассматривается прямое и косвенное влияние одного показателя на другой, а при изучении показателей II типа проводятся описание и измерение существующих обратных связей между показателями.

В нашей прикладной литературе наиболее распространенной формой выражения существующих между статистическими показателями связей являются уравнения множественной регрессии, но объединенные в систему, т. е. простые ЭМ. Для тех случаев, когда не ставится больших познавательных целей, такой простой изолированный путь расчетов часто полностью всех удовлетворяет. Однако важно отметить, что в реальной действительности существует не только зависимость результативного показателя от его факторов, но и связи между самими факторными показателями. Подробно описать всю такую систему причинноследственных связей можно с помощью рекурсивных ЭМ, если только упорядоченные эндогенные переменные образуют как бы причинную цепь, в связи с чем ее часто называют рекурсивной причинной цепью. При оценке динамики экономических процессов рекурсивные ЭМ, по мнению автора, имеют большое значение. Они лучше приспособлены для динамического анализа взаимосвязанной системы показателей, их комплексного изучения.

Для анализа совместно протекающих процессов следует применять систему одновременных структурных уравнений. Такие модели также должны быть шире использованы при оценке динамики экономических явлений и процессов. Разумеется, как и другие методы прогнозирования используются в сочетании со статистическими, так и ЭМ следует применять на практике наряду с другими формальными и неформальными способами прогнозирования.

Практическое применение ЭМ требует разработки удобных схем статистических расчетов. По мнению автора, хорошим математическим средством для решения такой задачи являются алгоритмы, разработанные на основе теории матриц.

2. Алгоритмы расчетов оценки параметров уравнений регрессий рекурсивных эконометрических моделей

Оценка параметров уравнений регрессий рекурсивных ЭМ требует выполнения трудоемких систем расчетов. Чтобы упростить вычислительную процедуру нахождения уравнений ЭМ, следует составить схемы решения систем нормальных уравнений на основе теории матричной алгебры.

Теория метода наименьших квадратов (в дальнейшем - МНК) может быть изложена в терминах матричной алгебры [3]. Хорошей особенностью МНК является то, что он полностью избавляет от необходимости исследовать совместность заданной первоначальной системы, что очень важно для выполнения практических расчетов. Кроме того, в динамическом статистическом анализе следует найти как систему уравнений регрессии между показателями, так и разные коэффициенты корреляции.

В математической литературе обосновано, что расширенную квадратную матрицу нормальных уравнений, как принадлежащую к типу симметрических матриц и имеющую положительную определенную квадратическую форму, можно представить в виде произведения 2 треугольных матриц В и С различных структур [2, с. 200; 9, с. 171]:

$$X = B \cdot C \tag{1}$$

или

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_1 & & \sum x_n & \sum x_{n+1} \\ \sum x_1 & \sum x_1^2 & & \sum x_1 x_n & \sum x_1 x_{n+1} \\ \sum x_2 & \sum x_2 x_1 & & \sum x_2 x_n & \sum x_2 x_{n+1} \\ & & & & \\ \sum x_n & \sum x_n x_1 & & \sum x_n^2 & \sum x_n x_{n+1} \\ \sum x_{n+1} & \sum x_{n+1} x_1 & & \sum x_{n+1} x_n & \sum x_{n+1}^2 \end{bmatrix} = \tag{2}$$

$$
= \begin{bmatrix} b_{00} & 0 & 0 & & 0 \\ b_{10} & b_{11} & 0 & & 0 \\ b_{20} & b_{21} & b_{22} & & 0 \\ & & & & \\ b_{n0} & b_{n1} & b_{n2} & & 0 \\ b_{n+1,0} & b_{n+1,1} & b_{n+1,2} & & b_{n+1,n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & c_{01} & c_{02} & & c_{0,n+1} \\ 0 & 1 & c_{12} & & c_{1,n+1} \\ 0 & 0 & 1 & & c_{2,n+2} \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & c_{n,n+1} \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}
$$

Отметим, что x_1, x_2, x_n – факторные показатели; x_{n+1} – результативный показатель всей системы.

Диагональные элементы матрицы С равны I, а остальные элементы треугольных матриц В и С определяются по следующим формулам [2, с. 200].

$$b_{i0} = \sum x_i \qquad (i=0, 1, 2, ..., n, n+1), \tag{3}$$

$$b_{ij} = x_{ij} - \sum_{k=0}^{j} b_{ik} c_{kj}, \quad \text{где } i \geq j > 0,$$

$$x_{ij} = \sum x_i x_j, \qquad (i=1, 2, ..., n, n+1), \tag{4}$$

$$c_{ij} = \left(b_{ji} : b_{ii}\right) \quad \left(i < j, \text{ при условии, что } x_{ij} = x_{ji}\right) \tag{5}$$

В практических расчетах нам следует не просто найти элементы треугольных матриц, но и дать им аналитическую интерпретацию, выразить их через статистические параметры арифметрические средние, парные коэффициенты корреляции, параметры уравнений регрессии, показатели дисперсии и т. д. Попытаемся это сделать. С помощью формул (3–5) элементы матриц В и С выразили через статистические характеристики.

Сначала следует найти, чему равны элементы первого столбца треугольной матрицы В. Из (3) имеем, что элементы первого столбца матрицы В равны соответствующим членам расширенной матрицы Х:

$$b_{00} = \sum x_{00} = n; \quad b_{10} = \sum x_1, \ldots, b_{n+1,0} = \sum x_{n+1}$$

Как видно, значение элементов b_{i0} ($i=0,1, 2, \dots, n+1$) совершенно ясное и не требует никаких дополнительных пояснений. Это абсолютные суммы изучаемых показателей. Элемент b_{00} означает число годов изучаемого периода и всегда больше, чем число изучаемых факторных показателей, т. е. в алгебраических выражениях $b_{00}=n$ и x_n буква n означает различные величины.

Элементы первой строки матрицы С находим по формуле:

$$c_{0j} = b_{j0}:b_{00} \quad (j=1, 2, 3, \dots, n, n+1),$$

Так как $b_{00}=n$, то получим средние значения всех показате- $c_{0j} = \sum x:n = \bar{x}_j$

Второй столбец элементов матрицы В получим из (4) на основе следующей формулы:

$$b_{i1} = x_{i1} - b_{10}c_{01} \quad (i=1, 2, 3, \dots, n, n+1), \tag{6}$$

где x_{i1} - члены второй строки матрицы X. Для всех b_{i1} (когда $i>1$) после подстановки значений из (6) получим:

$$b_{i1} = x_{i1} - b_{i0}c_{01} = \sum x_i x_1 - \bar{x}_1 \sum x_i \tag{7}$$

Известно, что

$$\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y}) = \sum xy - \bar{x}\sum y = nr_{xy}\sigma_x\sigma_y ,$$

поэтому из (7) при $i>1$ получим:

$$b_{i1} = \sum x_i x_1 - \bar{x}_1 \sum x_i = nr_{1i}\sigma_i\sigma_1$$

Для нахождения b_{11} (с первого члена второго столбца матрицы В) проделаем следующие преобразования:

$$b_{11} = x_{11} - b_{10}c_{01} = \sum x_1^2 - \bar{x}_1 \sum x_1 = n\sigma_1^2,$$

ибо из теории статистики известно, что

$$\sum y^2 - \bar{y}\sum y = n\sigma_y^2$$

Элементы второй строки треугольной матрицы С в (5) равны:

$$c_{ij} = b_{j1}:b_{11} = nr_{1j}\sigma_1\sigma_j:n\sigma_1^2 = r_{1j}\frac{\sigma_j}{\sigma_1} \quad (j=2, 3, \dots, n+1)$$

Полученное выражение является коэффициентами парной регрессии. В общепринятых обозначениях [см. 13, с. 328] вторая строка матрицы равна:

$$c_{1j} = a_{j1} \quad (j=1, 2, 3, 4, \dots, n, n+1).$$

В дальнейшем во избежание повторений следует сразу дать статистическую интерпретацию всех диагональных элементов следующих столбцов матрицы B, а затем и всех остальных ее элементов.

По (4) первый диагональный элемент третьего столбца матрицы B равен:

$$b_{22} = \sum x_2^2 - b_{20} \cdot c_{02} - b_{21} \cdot c_{12}$$

Используя значения c_{02}, c_{12}, b_{20} и b_{21} получим: $b_{22} = \sum x_2^2 -$

$$-\bar{x}_2 \sum x_2 - c_{12} \sum x_1 x_2 = n\sigma_2^2 - c_{12} \sum x_1 x_2 = n\sigma_{2.1}^2$$

Элемент b_{22} статистически обозначает сумму отклонений $\tilde{x}_{2.1}$ от x_2.

Обобщая уже полученные результаты для диагональных элементов первой и второй колонок матрицы B, делаем следующий вывод: оба они при делении на число годов n дают показатели рассеивания. Деля b_{11} на n получаем средний квадрат отклонения первого признака, деля b_{22} на n получаем среднеквадратическую погрешность значения x_2 по уравнению регрессии, или среднеквадратическую погрешность этой регрессии, как ее называл В. И. Романовский [8, с. 558].

Диагональные элементы других столбцов матрицы B находим тем же способом, что и b_{22}, только при этом следует выполнить более громоздкие выкладки, которых здесь не приводим.

Для общего случая получили бы:

$$b_{ii} = n\sigma_1^2 \left(1 - r_{1i}^2\right)\left(1 - r_{2i.1}^2\right) \dots \left(1 - r_{(i-1)i.123\dots(i-2)}\right) = n\sigma_{i.123\dots(i-1)}^2,$$

из чего можно сделать общий вывод, что все главные элементы матрицы B обозначают минимальную сумму отклонений, ранее включенных в анализ показателей от уровня соответствующих уравнений регрессии.

Статистическую интерпретацию получают и остальные элементы матрицы B. Например, по (4) после всех преобразований получаем, чему равны элементы второго столбца матрицы [4, с. 9]:

$$b_{i2} = nr_{2i.1}\sigma_{i.1}\sigma_{2.1}. \tag{9}$$

Для нахождения элементов следующих столбцов матрицы B следует проделать аналогические действия [5, с. 10]. Общее выражение любого элемента матрицы B равно (i<j):

$$b_{ji} = nr_{ji.123...(i-1)}\sigma_{i.123...(i-1)}\sigma_{j.123...(i-1)}. \tag{10}$$

Этим можно закончить статистическое определение элементов матрицы B и перейти к статистической интерпретации элементов матрицы C.

Из доказанного ранее следует, что полученные члены второй строки матрицы C – коэффициенты обыкновенных уравнений регрессии. Это наводит на мысль, что в других строках можно получить коэффициенты уравнений регрессии, стоящие при последнем факторном показателе аналитической системы.

Из теории статистики известно, что [11, с. 172]:

$$a_{12.34...n} = r_{12.34...n}\frac{\sigma_{1.23...n}}{\sigma_{2.13...n}} \tag{11}$$

где $a_{12.34...n}$ – коэффициент уравнений n-го порядка.

Элементы матрицы C везде можно найти по формуле:

$$c_{ij} = \left(b_{ji} : b_{ii}\right) \quad (i < j).$$

Подставив полученные ранее значения b_{ji} и b_{ii} находим:

$$c_{ij} = \frac{b_{ji}}{b_{ii}} = r_{ij.123...(i-1)} \cdot \frac{\sigma_{j.123...(i-1)}}{\sigma_{i.123...(i-1)}}. \tag{12}$$

Формулы (11) и (12) аналогичны по своему содержанию, поэтому представляют собой коэффициенты уравнения множественной регрессии.

Все полученные при вычислении элементов треугольных матриц статистические характеристики представлены в табл. 1[1].

Как уже отмечалось, в цепных системах показателей обозначение их не может быть произвольным. Показатель, являющийся частичной причиной всех остальных, следует обозначить x_1, следующий за ним показатель по общности влияния на все остальные – x_2 и т. д.

Таблица 1. **Статистическое значение элементов матриц B и C**

$b_{00}=n$	$c_{01}=\bar{x}_1$	$c_{02}=\bar{x}_2$		$c_{0,n+1}=\bar{x}_{n+1}$
$b_{10}=\Sigma x_1$	$b_{11}=n\sigma_1^2$	$c_{12}=a_{21}$		$c_{1,n+1}=a_{n+1,1}$
$b_{20}=\Sigma x_2$	$b_{21}=nr_{12}\sigma_1\sigma_2$	$b_{22}=n\sigma_{2.1}^2$		$c_{2,n+1}=a_{n+1,2.1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$b_{n+1,0}=\Sigma x_{n+1}$	$b_{n+1,1}=nr_{1,n+1}\sigma_1$ σ_{n+1}	$b_{n+1,2}=nr_{n+1,3.1}\cdot$ $\cdot\sigma_{n+1,1}\sigma_{2.1}$		$b_{n+1,n+1}=$ $=n\sigma^2_{n+1.123...(n-1)n}$

Результативный показатель следует рассматривать как последний, замыкающий факторный показатель в данной системе, зависящий от всех остальных. При статистическом анализе таких систем для каждого показателя, кроме первого, нужно выделить зависимую и независимую части.

Зависимая часть показателя определяется изменением других показателей, представленных в изучаемой системе. Динамика первого показателя системы полностью и тот независимый остаток других, который не определяется изменением перед ним стоящими показателями, составляют часть вариации изучаемой системы. При правильном выборе факторных показателей независимая часть результативной величины должна совпадать со случайной, зависимая – со систематической частью. Кроме того, при статистических расчетах, предназначенных для изучения причинной зависимости между показателями, следует отдельно выделить и охарактеризовать прямое, непосредственное влияние любого фактора системы

[1] Более детальные схемы расчетов выполнения регрессионного анализа на базе матричной алгебры представлены в [1, с. 39–51; 4, с. 3–13].

на результативный показатель и косвенное влияние изучаемого факторного показателя посредством изменения других.

Тот общий механизм взаимодействия, который существует в рекурсивной системе факторных показателей, может быть описан соотношениями (табл. 2)[2].

Используя значения таблиц 1 и 2, после трудоемких, но не сложных математических выкладов, получим:

$$\begin{cases} \tilde{x}_{2.1} = \bar{x}_2 + a_{21}\left(x_{1i} - \bar{x}_1\right), \\ x_{3.12} = \bar{x}_3 + a_{31}\left(x_{1i} - \bar{x}_1\right) + a_{32.1}\left(x_{2i} - \tilde{x}_{2.1}\right), \\ x_{4.12} = \bar{x}_4 + a_{41}\left(x_{1i} - \bar{x}_1\right) + a_{42.1}\left(x_{2i} - \tilde{x}_{2.1}\right) + a_{43.12}\left(x_{3i} - \tilde{x}_{3.12}\right), \\ \\ x_{(n+1).123n} = \bar{x}_{n+1} + a_{(n+1)1}\left(x_{1i} - \bar{x}_1\right) + a_{(n+1)2.1}\left(x_{2i} - \tilde{x}_{2.1}\right) + \ldots \\ \qquad + a_{(n+1)n.123\ldots(n-1)}\left(x_{ni} - \tilde{x}_{n.123\ldots(n-1)}\right), \end{cases} \tag{13}$$

где $\tilde{x}_{2.1}, \tilde{x}_{3.12}, \ldots, \tilde{x}_{n.123\ldots(n-1)}$ расчетные уровни факторных показателей. Замечательно то, что в системе (13) учитывается неодинаковое значение показателей по своему влиянию на другие показатели. При такой записи уравнение множественной регрессии показывает не только зависимость результативного показателя от факторных показателей (что обычно и делается в прикладном регрессионном анализе), но и зависимость между ними (что упускается из виду), т. е. описываются структура причинной зависимости, внутренний механизм взаимозависимости и взаимодействия признаков в явлениях социальной и экономической жизни. В записанных таким образом уравнениях явно виден вклад каждого фактора в изменение результативных показателей. В экономическом анализе это имеет большое значение, так как позволяет расчленить прирост любого результативного показателя по его факторам, с учетом их взаимозависимости. Система (13) позволяет определить увеличение каждого фактора, кроме первого, сверх их расчетного уровня, или установить их независимую часть увеличения во взаимосвязанной системе показателей.

[2] Статистические доказательства формул, представленных в табл. 2, даны в [5, с. 32–35].

Т а б л и ц а 2. Соотношение между коэффициентами регрессии в рекурсивных ЭМ

Коэффициент регрессии	Характер влияния на результативный показатель				
	прямой в пределах данной системы	косвенный, посредством соответствующих факторов			
		n	...	3	2
$a_{(n+1)1}$	$a_{(n+1)1.23...n}$	$a_{(n+1)n.123...(n-1)} \cdot a_{n1.23...(n-1)}$ +	+	$a_{(n+1)3.12} \cdot a_{31.2}$ +	$a_{(n+1)2.1} \cdot a_{21}$
$a_{(n+1)2.1}$	$a_{(n+1)2.13...n}$	$a_{(n+1)n.123...(n-1)} \cdot a_{n2.13...(n-1)}$ +	+	$a_{(n+1)3.12} \cdot a_{32.1}$	
$a_{(n+1)3.12}$	$a_{(n+1)3.12...n}$	$a_{(n+1)n.123...(n-1)} \cdot a_{n3.124...(n-1)}$ +	+		
$a_{(n+1)(n-1) \cdot 123...(n-2)}=$	$a_{(n+1)(n-1).123...(n-2)n}$	$a_{(n+1)n.123...(n-1)} \cdot a_{n(n-1).123...(n-2)}$			
$a_{(n+1)n.123...(n-1)}$	$a_{(n+1)n.123...(n-1)}$				

Известно, что степень влияния любого фактора на результативную величину сильно зависит от величины и соотношения других факторов, составляющих ту более или менее благоприятную среду, в условиях которой фактор оказывает действие на результативный показатель. Даже при одной и той же величине изменения того или иного фактора эффект влияния будет различный, если первоначальная величина и соотношение факторов не одинаковы. Учесть такое положение можно с помощью системы (13), где представлены все расчетные уровни зависимых факторных показателей. По нашей системе расчетов (табл. 1) одновременно получаем уравнения регрессии не только результативного показателя x_{n+1} от x_1, x_2, x_3, , x_n но и x_n от x_1, x_2, , x_{n-1} и т. д. Кроме того, в данном случае экономический анализ приобретает новые методологические черты: вместо принципа изоляции, который положен в основу традиционного регрессионного анализа, переходим к взаимосвязанному изучению системы статистических показателей, к принципу последовательного элиминирования факторов.

Разработанная система расчетов должна найти применение при оценке динамики экономических процессов, так как позволяет проследить, как со временем меняется степень влияния отдельных факторов на эндогенные показатели, установить частные и общие динамические закономерности протекания изучаемого процесса.

3. Рекурсивные эконометрические модели в динамическом анализе

Опишем такую систему расчетов. Имеются данные цепной системы показателей за N лет минувшего периода. Из совокупности значений факторных показателей x_{t1}, x_{t2}, , x_{tn} ($t=1, 2, 3, \dots, N$) получаем матрицу X, а из результативных показателей вектор $X_{(n+1)}$:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_{12} & & x_{1n} \\ 1 & x_{22} & & x_{2n} \\ 1 & x_{32} & & x_{3n} \\ & & & \\ 1 & x_{N2} & x_{N3} & x_{Nn} \end{bmatrix}, \quad X_{(n+1)} = \begin{bmatrix} x_{1(n+1)} \\ x_{2(n+1)} \\ x_{3(n+1)} \\ \vdots \\ x_{N(n+1)} \end{bmatrix} \qquad (14)$$

На основе этих данных найти частные и общие динамические закономерности изучаемой системы взаимозависимых показателей.

Для решения такой задачи следует найти оценки параметров уравнений множественной регрессии рекурсивных ЭМ, постоянно изменяющиеся во времени.

Прежде всего выделяется первый период продолжительностью m лет (m>n). Для выделенного периода МНК вычисляются оценки параметров уравнений регрессий. Чтобы выделить следующий период, берутся те же годы начиная со второго года и кончая m годом, на следующем этапе – начиная с третьего года и кончая m+2 годом и т. д., а на последнем этапе – начиная с N+1–m годов и кончая последними N годами. Число выделяемых периодов равно N–m+1.

Чтобы в будущем упростить алгебраические доказательства, систему уравнений (14) для отдельных периодов l(l=1, 2, , N–m+1) и выделяемых годов (t=l, l+1, l+m–1) запишем в такой форме[3]:

$$
\begin{cases}
\tilde{x}^{(l)}_{2.1} = \bar{x}_{l2} + a^{(2)}_{l1}(x_{l1} - \bar{x}_1), \\
\tilde{x}^{(l)}_{3.12} = \bar{x}_{l3} + a^{(3)}_{l1}\left(x_{l1} - \bar{x}_1\right) + a^{(3)}_{l2}\left(x_{2l} - \tilde{x}_{2.1}\right), \\
\ldots \\
\tilde{x}^{(l)}_{i.123\ldots(i-1)} = \bar{x}_{li} + a^{(i)}_{l1}\left(x_{l1} - \bar{x}_1\right) + a^{(i)}_{l2}\left(x_{2l} - \tilde{x}_{2.1}\right) + \ldots + \\
\qquad + a^{i}_{l(i-1)}\left(x_{(i-1)l} - \tilde{x}_{(i-1).123\ldots(i-2)}\right), \\
\ldots \\
\tilde{x}^{(l)}_{(n+1).123\ldots n} = \bar{x}_{l(n+1)} + a^{(n+1)}_{l1}\left(x_{l1} - \bar{x}_1\right) + a^{(n+1)}_{l2}\left(x_{2l} - \tilde{x}_{2.1}\right) + \ldots + \\
\qquad + a^{(n+1)}_{ln}\left(x_{nl} - \tilde{x}_{n.123\ldots(n-1)}\right),
\end{cases}
\tag{15}
$$

где $a^{(j)}_{li}$ (i=1, 2, 3, ; j=1, 2, 3 ..., n, n+1; l=1, 2, , N–m+1) – коэффициенты регрессии, показывающие независимое влияние i-ого фактора на j показатель на l периоде; ‾ средняя арифметическая j-ого

[3] В данном случае коэффициенты регрессии системы (15) обозначаем как $a^{(j)}_i$ например, $a^{(3)}_2 = a_{32.1}, a^{(n+1)}_1 = a_{(n+1)1.23\ldots n}, a^{(n+1)}_n = a_{(n+1)n.123\ldots(n-1)}$ и т. д. Индекс l обозначает период, по данным которого вычисляются упомянутые коэффициенты регрессии.

показателя на l периоде; $\tilde{x}_{j.123...(j-1)}$ – расчетный уровень j-ого показателя по факторам x_1, x_2, x_3, , x_{j-1} на l периоде.

После всех расчетов для каждого уравнения системы (15) будет получено N–m+1 различных значений коэффициентов a_{li} уравнений регрессии и средних арифметических $a_{li}^{(j)}$ Для i-ого показателя все полученные коэффициенты (оценки параметров) и их средние арифметические можно записать в следующей матрице[4]:

$$A_i = \begin{bmatrix} \bar{x}_{1i} & a_{11}^{(i)} & a_{12}^{(i)} & a_{1(i-1)}^{(i)} \\ & a_{21}^{(i)} & a_{22}^{(i)} & a_{2(i-1)}^{(i)} \\ \bar{x}_{3i} & a_{31}^{(i)} & a_{32}^{(i)} & a_{3(i-1)}^{(i)} \\ x_{(N-m+1)\,i} & a_{(N-m+1)\,1}^{(i)} & a_{(N-m+1)\,2}^{(i)} & a_{(N-m+1)\,(i-1)}^{(i)} \end{bmatrix} \qquad (16)$$

Каждая строка матрицы показывает, как в этом периоде экзогенные показатели влияют на эндогенный показатель. По столбцам матрицы можно проследить степень взаимосвязи экзогенных показателей с эндогенной величиной. Для этой цели, используя данные матриц A_2, A_3, , A_i, , A_n, A_{n+1} следует найти усредненные значения средних $\bar{x}_{ti}$ (i=1, 2, ..., n, n+1) и коэффициентов регресии $a_{t(i-1)}^{(i)}$ для каждого года t (t=1, 2, 3, , N).

Если продолжительность выделяемого периода m меньше или равна (N+1):2, то для вычисления годовых усредненных значений средних и коэффициентов регрессии следует применять формулы, представленные в табл. 3. В тех случаях, когда продолжительность выделяемого периода m>[(CN+1):2] необходимо использовать формулы, указанные в табл. 4.

Пользуясь формулами таблиц 3 и 4, можно написать аналитическое выражение для количественного представления общей закономерности изменения изучаемого процесса, представленного системой взаимозависимых показателей:

---

[4] Для показателей X_2, X_3, , X_{i-1}, X_{i+1}, X_n, X_{n+1} составляются аналогичные матрицы A_2, A_3, ..., A_{n+1}. Каждая из них охватывает неодинаковое количество коэффициентов регрессии; на единицу меньше, чем индекс матрицы.

$$
\begin{cases}
\tilde{x}_{2t} = \bar{\bar{x}}_{t2} + \bar{a}_{t1}^{(2)}\left(x_{1t} - \bar{x}_1\right) \quad (t = 1,2,3,\ldots,N), \\
\tilde{x}_{3t} = \bar{\bar{x}}_{t3} + \bar{a}_{t1}^{(3)}\left(x_{1t} - \bar{x}_1\right) + \bar{a}_{t2}^{(3)}\left(x_{2t} - \tilde{x}_{2t}\right) \quad (t = 1,2,\ldots,N), \\
\tilde{x}_{it} = \bar{\bar{x}}_{ti} + \bar{a}_{t1}^{(i)}\left(x_{1t} - \bar{x}_1\right) + a_{t2}^{(i)}\left(x_{2t} - \tilde{x}_{2t}\right) + \ldots + \\
\qquad + a_{t(i-1)}^{(i)}\left(x_{(i-1)t} - \tilde{x}_{(i-1)t}\right) \quad (t = 1,2,3,\ldots N), \\
\tilde{x}_{(n+1)t} = \bar{\bar{x}}_{t(n+1)} + \bar{a}_{t1}^{(n+1)}\left(x_{1t} - \bar{x}_1\right) + a_{t2}^{(n+1)}\left(x_{2t} - \tilde{x}_{2t}\right) + \ldots + \\
\qquad + \bar{a}_{tn}^{(n+1)}\left(x_{nt} - \tilde{x}_{nt}\right) \quad (t = 1,2,3\ldots, N).
\end{cases}
\tag{17}
$$

В коэффициентах $\bar{a}_{tk}^{(i)}$ (k<1) системы (17) учитываются динамичность взаимосвязи экзогенных показателей с эндогенными, изменчивость их зависимости в динамике. В усредненных средних $\bar{\bar{x}}_{ti}$ (i=1, 2, 3, , n, n+1) отражается переменный уровень эндогенных показателей. По своему экономическому содержанию средние $\bar{\bar{x}}_{ti}$ близко скользящим средним, давно применяемым в теории статистики.

Средние $\bar{\bar{x}}_{ti}$ и коэффициенты $\bar{a}_{tk}^{(i)}$ для каждого показателя i (i=2, 3, , n+1) составляют целые статистические совокупности, которые можно представить в качестве матриц $A_2, A_3, A_4, \ldots, A_{(n+1)}$.

Например, матрица A_i равна:

$$
A_i = \begin{bmatrix}
\bar{\bar{x}}_{1i} & \bar{a}_{11}^{(i)} & a_{12}^{(i)} & & \bar{a}_{1(i-1)}^{(i)} \\
\bar{\bar{x}}_{2i} & \bar{a}_{21}^{(i)} & \bar{a}_{22}^{(i)} & & \bar{a}_{2(i-1)}^{(i)} \\
 & & \cdot & & \cdot \\
\bar{\bar{x}}_{Ni} & \bar{a}_{N1}^{(i)} & \bar{a}_{N2}^{(i)} & & \bar{a}_{n(i-1)}^{(i)}
\end{bmatrix}
\tag{18}
$$

В элементах матрицы A_i отражается весь процесс влияния факторных показателей x_1, x_2, x_3, , $x_{(i-1)}$ (экзогенных величин) на результативную величину x_i за весь исследуемый промежуток времени. Более детально проанализируем этот процесс.

Таблица 3. **Усреднение уровня и коэффициентов регрессии, когда $m \le (N+1):2$**

Порядковый номер формулы	Средняя величина $\bar{\bar{x}}_{ti}$ (i=1, 2, 3 , , n, n+1)	Коэффициент регрессии $a_{jk}^{(i)}$ (k<1) (i=1, 2, 3, ..., n, n+1, k=1, 2, 3, ..., (i-1))
1.	$\bar{\bar{x}}_{ti} = \frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t} x_{ji}$ (t=1, 2, 3, ..., m),	$\bar{a}_{tk}^{(i)} = \frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t} a_{jk}^{(i)}$ (t=1, 2, 3, ..., m),
2.	$\bar{\bar{x}}_{ti} = \frac{1}{m}\sum_{j=t-m+1}^{t} x_{ji}$ (t=m+1, ..., N-m+1),	$\bar{a}_{tk}^{(i)} = \frac{1}{m}\sum_{j=t-m+1}^{t} a_{jk}^{(i)}$ (t=m+1, ..., N-m+1),
3.	$\bar{\bar{x}}_{ti} = \frac{1}{N-t+1}\sum_{j=t-m+1}^{N-m+1} \bar{x}_{ji}$ (t=N-m+2, ..., N),	$\bar{a}_{tk}^{(i)} = \frac{1}{N-t+1}\sum_{j=t-m+1}^{N-m+1} a_{jk}^{(i)}$ (t=N-m+2, ..., N).

Таблица 4. **Усреднение уровня и коэффициентов регрессии, когда m>(N+1):2**

Порядковый номер формулы	Средняя величина $\bar{\bar{x}}_{ti}$ (i=1, 2, 3 , , n, n+1)	Коэффициент регрессии $a^{(i)}_{jk}$ (i=1, 2, 3, ..., n, n+1; k=1, 2, 3, ..., (I-1), k<I)
1.	$\bar{\bar{x}}_{ti}=\frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t}\bar{x}_{ji}$ (t=1, 2, 3, ..., m),	$\bar{a}^{(i)}_{tk}=\frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t}a^{(i)}_{jk}$ (t=1, 2, 3, ..., m),
2.	$\bar{\bar{x}}_{ti}=\frac{1}{N-m+1}\sum_{j=1}^{N-m+1}\bar{x}^{(i)}_{ji}$ (t=N-m+2, ..., m),	$\bar{a}^{(i)}_{tk}=\frac{1}{m}\sum_{j=t-m+1}^{t}a^{(i)}_{jk}$ (t=N-m+2, ..., m),
3.	$\bar{\bar{x}}^{(i)}_{ti}=\frac{1}{N-t+1}\sum_{j=t-m+1}^{N-m+1}\bar{x}^{(i)}_{ji}$ (t=m+1, m+2, ..., N),	$\bar{a}^{(i)}_{tk}=\frac{1}{N-t+1}\sum_{j=t-m+1}^{N-m+1}a^{(i)}_{jk}$ (t=m+1, ..., N).

В формулах таблицы 3 и 4 k – номер экзогенных показателей, i – номер результативного (эндогенного) показателя, t – номер года.

Если в столбцах матриц A_j (j=2, 3, 4, ... , i, ..., n, n+1) или любого среднего и коэффициента регрессии замечаем какую либо неправильную тенденцию изменения, то можно констатировать, что со временем меняются взаимосвязь факторов, их степень влияния на эндогенные показатели. Следует статистически установить направление и величину этого изменения.

В виду того, что изменение взиамосвязи показателей обычно происходит постепенно, плавно, часто можно принять, что изменение значений средних $\bar{\bar{x}}_{ti}$ (i=2, 3, 4, , n, n+1)) и коэффициентов регрессии $\bar{a}_{tk}^{(i)}$ (k<i; k=1,2, , (i-1)) происходит по прямой:

$$\tilde{\bar{\bar{x}}}_{ti} = c_{0i} + c_{1i}t \quad \left(t = 1, 2, 3, \ldots, N;\ i = 2, 3, \ldots, n, (n+1)\right), \tag{19}$$

$$\tilde{\bar{a}}_{tk}^{(i)} = b_{0k}^{(i)} + b_{1k}^{(i)} \quad \left(t = 1, 2, 3, \ldots, N; i = 2, 3, \ldots, (n+1);\ k<i;\ k=1,2,3,\ldots,(i-1)\right). \tag{20}$$

Для проверки гипотезы о наличии систематической или случайной вариации в изменении средних уравнений и коэффициентов регрессии используется тест Стьюдента. Если при использовании данного теста устанавливается, что значения коэффициентов c_{1i} и $b_{1k}^{(i)}$ существенно отличаются от нуля то можно вычислить из значения для перспективы и тем самым дать оценку будущей взаимосвязи показателей:

$$a_{Tk} = b_{0k}^{(i)} + b_{1k}^{(i)}T \tag{21}$$

$$\left(T = N + p;\ p \le (N{:}2);\ k < i;\ k = 1, 2, 3, \ldots, (i-1);\ i = 2, 3, \ldots, (n+1)\right).$$

$$\bar{\bar{x}}_{Ti} = c_{0i} + c_{1i}T \tag{22}$$

$$\left(T = N + p;\ p \le (N{:}2);\ i = 2, 3, \ldots, (n+1);\ k = 1, 2, 3, \ldots, (i-1)\right).$$

Если верна гипотеза, что $b_{1k}^{(i)}=0$, то между независимой частью показатели x_k и эндогенной величиной x_i в динамике в целом остается постоянная связь. Прогнозные оценки для такого коэффициента не выполняются, а просто принимается, что $\bar{a}^{(i)}_{Nk} = a^{(i)}_{Tk}$. Плавный ли тренд среднего уровня изучаемого показателя показывает коэффициент c_{1i}. Если можно принять гипотезу, что $c_{1i}=0$, тогда принимается, что $\bar{\bar{\bar{x}}}_{Ti} = \bar{\bar{x}}_{Ni}$

Зная значения x_{Ti} и $a^{(i)}_{Tk}$ можно достаточно обоснованно судить о будущих уровнях показателей.

Для этой цели необходимо использовать следующую систему уравнений регрессии:

$$\begin{cases} \tilde{x}_{2T} = \bar{\bar{\bar{x}}}_{T2} + a^{(2)}_{T1}\left(x_{1T} - \bar{x}_1\right), \\ x_{3T} = \bar{\bar{\bar{x}}}_{T3} + a^{(3)}_{T1}\left(x_{1T} - \bar{x}_1\right) + a^{(3)}_{T2}\left(x_{2T} - \tilde{x}_{2T}\right), \\ \tilde{x}_{iT} = \bar{\bar{\bar{x}}}_{Ti} + a^{(i)}_{T1}\left(x_{1T} - \bar{x}_1\right) + a^{(i)}_{T2}\left(x_{2T} - \tilde{x}_{2T}\right) + \ldots + \\ + a^{(i)}_{T(i-1)}\left(x_{(i-1)T} - \tilde{x}_{(i-1)T}\right), \\ x_{(n+1)T} = \bar{\bar{\bar{x}}}_{T(n+1)} + a^{(n+1)}_{T1}\left(x_{1T} - \bar{x}_1\right) + a^{(n+1)}_{T2}\left(x_{2T} - \tilde{x}_{2T}\right) + \ldots + \\ + a^{(n+1)}_{Tn}\left(x_{nT} - \tilde{x}_{nT}\right), \\ \left(T = N + p;\ p \le N{:}2\right). \end{cases} \qquad (23)$$

Обычно прогнозные значения показателей x_{2T}, x_{3T}, , x_{nT} принимаются равным $\tilde{x}_{2T}, \tilde{x}_{3T}, \ldots, \tilde{x}_{nT}$ в результате чего систему уравнений (23) можно существенно упростить; прогнозные значения любого эндогенного показателя x_j можно найти с помощью следующего уравнения регрессии:

$$\tilde{x}_{jT} = \bar{\bar{\bar{x}}}_{Tj} + a^{(j)}_{T1}\left(x_{1T} - \bar{x}_1\right) \quad \left(j = 2, 3, \ldots, n, n+1\right). \qquad (24)$$

Прогнозные значения показателя x_j определяют средний уровень динамического ряда данного эндогенного показателя в динамике экзогенного показателя x_1. Важно правильно оценить динамику среднего уровня эндогенных показателей, так как она представляет важнейшую часть общей тенденции развития анализируемого процесса. На произведение $a^{(j)}_{Ti}\left(x_{1T} - \bar{x}_1\right)$ можно смотреть как на коррекцию общей динамики развития изучаемого показателя. Первое слагаемое (средний уровень) выражает существенные типичные черты данного массового процесса, а второе внешнее влияние на процесс через управляемые факторы.

В целом расчеты по любой рекурсивной ЭМ дают цепную предикцию. По первому уравнению модели типа (23) вычисляются прогнозы показателя x_2 на первый год прогнозируемого периода, по второму - x_3 и т. д. Так получен первый вектор прогнозов. Повторяя весь процесс заново, получаем прогнозы эндогенных переменных на второй год прогнозирования. И так, шаг за шагом, получаем все оценки динамики на прогнозируемый период.

4. Выводы

1. Для спецификации односторонней структуры связей в системе экономических показателей и осуществления комплексного факторного анализа целесообразно применять разработанную в статье цепную объясняющую модель, обеспечивающую научный подход к анализу структуры причинных связей.

2. Весь сравнительный экономический анализ надо вести последовательно, по этапам. Первоначально надо изучить зависимость результативного факторного показателя от одного факторного показателя, потом от двух, трех и т. д. В статье предоставлена развернутая интерпретация моделей причинной зависимости массовых явлений и доказана правомерность их существования.

3. Плавную динамику экономических процессов и динамизацию параметров соответствующих экономических моделей следует определять на основании расчетов, построенных на базе скользящих рядов, что обеспечивает обоснованное выдвижение альтернатив перспективного развития и оценку динамики механизма связей экономических процессов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алгоритмы и программы экономического анализа и прогнозирования - Вильнюс / Ин-т экономики АН Лит. ССР, 1978.

2. Демидов Б. Л., Марон И. А. Основы вычислительной математики. - М., 1968.

3. Линник Ю. Ю. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. - М., 1962.

4. Мартишюс С. И. Статистическое значение элементов треугольных матриц, полученных при решении систем нормальных уравнений // Труды АН Лит. ССР. Сер. А, 1967. – Т. 2(24). – С. 21–31.
5. Мартишюс С. И. Метод наименьших квадратов в экономических расчетах (4. Экономическое содержание коэффициентов уровнений описательных моделей) // Тр. АН Лит. ССР. Сер. А. 1971. – Т. 1(35). – С. 29–40.
6. Мартишюс С. Методологические проблемы построения и применения эконометрических моделей. – Вильнюс, 1979.
7. Немчинов В. С. Избранные произведения. – М., 1967 – Т. 1.
8. Романовский В. И. Математическая статистика. – Ташкент, 1961. – Т. 1.
9. Фадеев Д. К., Фадеев В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. – М., 1963.
10. Фишер Ф. Проблемы идентификации в эконометрии. – М., 1978.
11. Юл. Дж., Кендал М. Теория статистики. – М., 1960.

EKONOMINIŲ PROCESŲ RAIDOS ANALIZĖS EKONOMETRINIAI MODELIAI

Stasys Martišius

Santrauka

Rengiant ūkinių procesų prognozes išskirtinė vieta tenka priežastinių ryšių ekonometriniams modeliams. Jais naudojantis įvairius statistinius modelius galima sujungti į kompleksinę skaičiavimų sistemą. Skaičiavimams atlikti būtina naudoti matricų algebrą. Visus ekonometrinės analizės etapus būtina atlikti palaipsniui. Prognozuojama atsižvelgiant į informacijos senėjimo procesą, informatyvesnius vėlesnių laikotarpių duomenis. Sudarant prognozes, į juos ir reikia labiau atsižvelgti. Visiems skaičiavimams atlikti būtina naudoti skaičiavimo algoritmus, sujungiančius įvairius statistinius metodus (vidurkius, koreliaciją, regresiją) į vieną sistemą. Prognozuojant ekonominius rodiklius, žingsnis po žingsnio tikslinami skaičiavimai, nuolatos patikslinamos gaunamos prognozuojamų rodiklių prognostinės reikšmės.

THE ECONOMETRIC MODELS OF THE ANALYSIS OF THE DEVELOPMENT OF ECONOMIC PROCESSES

by S. Martišius

Summary

Econometric models Combines all statistic methods into a system. The econometric analysis of the economic indicators have to ve complex and performed in stages. Forecasting the national economy's processes, it is necessary to bear in mind the ageing of formation and the instability of its flow.