OPTIMALAUS VERTYBINIŲ POPIERIŲ PORTFELIO SUDARYMO YPATUMAI

Deimantė Vasiliauskaitė

Lektorė
Vilniaus universiteto Kauno
humanitarinio fakulteto
Finansų ir apskaitos katedra
Muitinės g. 8, Kaunas
Tel. (+370 37) 42 29 26
El. paštas: deimadarbas@yahoo.com

Paprastai finansinėje literatūroje portfelio sudarymas yra traktuojamas griežtai teoriniu lygmeniu. Pagal Markowitz modelį investuotojas turi tam tikras galimybes, ir jis pasirenka geriausią portfelį, remdamasis abejingumo kreivėmis ir efektyvumo riba. Kita vertus, CAPM modelis yra pristatomas kaip išradinga idėja, kuri supaprastina ir padaro efektyvų Markowitz modelį. Daugelis teoretikų ir net praktikų apibendrina šiuos modelius kaip nepritaikomą teoriją. Tai yra tiesiog racionalus elgesys, kurio dažniausiai galima tikėtis, susipažinus su sudėtingais skaičiavimo metodais.

***Tyrimo tikslas** – pritaikyti praktiškai minėtus optimizavimo modelius, kuriuos galėtų pakartoti kiekvienas investuotojas, t. y. pratęsti tai, ką darė tokie autoriai: Black (1972); Merton (1973) ir vėliau Levy ir Sarnat (1982); Elton ir Gruber (1995) ir Benninga (1997). Jie teigė, kad optimalus portfelis gali būti surastas maksimizuojant nuolydį linijos, kuri jungia nerizikingos palūkanų normos tašką su efektyvia riba. Kai yra pasiekiama maksimali liestinė, tada minėta linija yra vadinama kapitalo rinkos tiese (CML), kuri yra efektyvios ribos liestinė.*

***Tyrimo objektas** – vertybinių popierių rinka.*

***Tyrimo metodai** – mokslinės literatūros analizė ir sintezė, kiekybiniai matematiniai ir statistiniai duomenų apdorojimo metodai.*

Kapitalo rinkos tiesės (CML) nustatymo specifika

Markowitz modelis yra klasikinis finansinių instrumentų portfelio modelis. Šį modelį praėjusio amžiaus šeštajame dešimtmetyje pasiūlė Harry Markowitz. Jo modeliu pagrįsta šiuolaikinė portfelio teorija. Markowitz pirmasis pasiūlė efektyvaus portfelio terminą.

Efektyvus portfelis yra apibūdinamas kaip portfelis, kuris turi mažiausią riziką esant tam tikram pelningumui arba didžiausią pelningumą esant tam tikram rizikos lygiui. Markowitz padarė keletą pagrindinių prielaidų, kad investuotojai:

- mėgsta pelną ir vengia rizikos;
- sprendimus priima racionaliai;
- daro sprendimus, kad kiek įmanoma padidintų būsimą naudą. Investuotojo nauda yra planuojamo pelningumo ir rizikos funkcija.

Markowitz manė, kad realybėje tam tikromis sąlygomis investuotojas teiks pirmenybę neefektyviam portfeliui. Markowitz modelis yra pagrįstas planuojamo pelningumo ir rizikos sąvokomis. Markowitz modeliui reikalingi tam tikri duomenys:

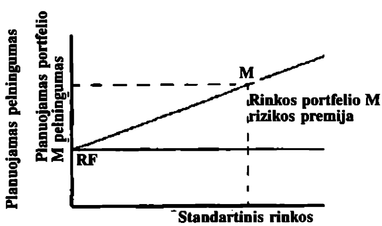
1) planuojamas kiekvieno instrumento pelningumas;

2) standartinis pelningumo nuokrypis kaip kiekvieno instrumento rizikos matas;

3) kovariacija – instrumentų pelningumų normų santykio matas [5, p. 329].

Markowitz efektyvios ribos liestinė taške M vadinama kapitalo rinkos linija (CML). Ji rodo pusiausvyros sąlygas rinkoje ir apima visus efektyvius portfelius. CML prasideda taške RF ir kyla per M tašką. Jei investuotojas investuoja į rizikingą turtą, jis turi gauti priedą, didesnių nei nerizikingas pelnas (RF) – rizikos premiją. M portfeliui rizikos premija yra skirtumas tarp planuojamo portfelio M pelningumo (ER_M) ir nerizikingo pelno normos (RF) [5, p. 337].

CML nuolydis yra rinkos kaina efektyvaus portfelio rizikai. Jis rodo, kiek papildomo pelningumo reikia rinkai už kiekvieną rizikos padidėjimo procentą. Ant kapitalo rinkos linijos yra tik efektyvūs portfeliai. CML gali būti tik kylanti, nes didėjant rizikai didėja rizikos premija [5, p. 337].



1 pav. CML tiesė

Šaltinis: Kancerevyčius G. Finansai ir investicijos, 2003, p. 337.

Analizuojant kapitalo rinkos tiesės nustatymo specifiką bus naudojami paprasti metodai, kurių tikslas – glaustai ir išsamiai išsiaiškinti kapitalo rinkos tiesės paskirtį.

Pagal Markowitz portfelio teoriją, CML sudarymo metodai turi tam tikrus etapus. Pavyzdžiui, tokie analitikai, kaip antai: Sharpe, Alexander ir Bailey (1999); Bodie, Kane ir Marcus (2000) naudoja metodą, kurį 1976 m. išrado Elton, Gruber ir Padberg. Pirmiausia jie generuoja rizikingų aktyvų portfelio ribos vidutinį nuokrypį naudodami Lagrange sukurtus optimizavimo metodus. Paskui jie nustato liestinį portfelį – rizikingos ribos portfelį, kuris yra ant CML tiesės arba jos atspindyje. Toliau jie nustato CML naudodami liestinį portfelį ir nerizikingą vertybinį popierių.

Tarkime, analizei pasirenkama rinka, kurioje yra N rizikingų vertybinių popierių ir vienas nerizikingas vertybinis popierius. Rizikingų vertybinių popierių atsitiktinėms pelningumo normoms žymėti pasirenkamas koeficientas R_i, čia i = 1, ..., N, o nerizikingo vertybinio popieriaus nuolatinis pelningumas pažymimas *RF*. Nėra nustatomas galimas pelningumo pasiskirstymas, tačiau įvertinami vidurkiai ir nuokrypiai, kurie yra realiai apibrėžti skaičiais. Rizikingų vertybinių popierių variacijos – kovariacijos matrica pažymima raide V. Taip pat tikslinga pažymėti, kad ši matrica yra teigiama ir yra abstrahuojamasi nuo neigiamų reikšmių. Galima pridurti, kad formuojant tokį modelį portfelyje nėra perteklinių vertybinių popierių.

Analizei pasirinktas portfelis, kuris sudarytas iš N+1 rinkos vertybinių popierių, pažymimas raide a ir išreiškiamas faktinių skaičių vektoriumi Nx1. Visa tai galima pažymėti a_i, i = 1, ..., N, čia a_i yra i-ojo rizikingo vertybinio popieriaus svoris vertybinių popierių portfelyje. Portfelis *a* turi tam tikrus teigiamus turto lygius ir jo pelningumas yra skaičiuojamas taip:

$$R_a = \left(1 - \sum_1^N a_i\right)RF + \sum_1^N a_i R_i \qquad (1)$$

matricos forma:

$$R_a = \left(1 - a^T 1\right)RF + a^T R; \qquad (2)$$

čia 1 yra R koeficiento Nx1 vektorius, kai $R = (R_1, ..., R_N)$ ir tai yra Nx1 rizikingų vertybinių popierių pelningumų vektorius, o laipsnis T žymi transponavimo ženklą.

$\left(1 - \sum_1^N a_i\right)$ ar $\left(1 - a^T 1\right)$, tai yra nerizikingų investicijų, esančių a portfelyje, svoriai ir kartu visų N +1 a portfelio vertybinių popierių, sujungtų į vieną, svoriai. Neigiami svoriai žymi trumpas pozicijas, ir vis didesnis svoris pažymi, kad investicija yra didesnė nei bendra investicija į portfelį [2, p. 251].

Numatomas (vidutinis) a portfelio pelningumas apskaičiuojamas kaip:

$$E(R_a) = \left(1 - \sum_{i=1}^N a_i\right)RF + \sum_{i=1}^N a_i E(R_i); \qquad (3)$$

čia $E(\bullet)$ yra tikimybinė funkcija; tai galima išreikti matrica:

$$E(R_a) = \left(1 - a^T 1\right)RF + a^T E; \qquad (4)$$

čia E yra Nx1 rizikingų vertybinių popierių numatomų pelningumų vektorius. Supaprastinus tai galima išreikšti formule:

$$E(R_a) = RF + a^T X; \qquad (5)$$

čia X yra Nx1 vektorius papildomo rizikingo vertybinio popieriaus numatomų pelningumų, didesnių nei RF [2, p. 253].

Tai yra

$$(X_1, X_2, ..., X_N) = (E(R_1) - RF, E(R_2) - RF, ...,$$
$$..., E(R_N) - RF) \text{ ar } X = E - 1RF \qquad (6)$$

Portfelio α pelningumo variacija yra skaičiuojama:

$$VAR(R_a) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \sigma_{ij}; \qquad (7)$$

$$\sigma_{ij} = COV(R_i, R_j) \qquad (8)$$

yra R_i ir R_j kovariacija. Kaip paprastai, atsitiktinio kintamojo R_i variacija yra žymima $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$, iš to išplaukia, kad

$$\sigma_a^2 = VAR(R_a) \qquad (9)$$

ir R_i standartinis nuokrypis yra σ_i. Matricine išraiška portfelio a pelningumo normos variacija išreiškiama:

$$VAR(R_a) = a^T Va. \qquad (10)$$

Portfelio efektyvumo riba – tai rinkinys portfelių, kurie turi mažiausią standartinį nuokrypį esant tam tikram tikėtinam pelningumui. Portfelis a priklauso portfelio efektyvumo ribai, jei esant tikėtinam pelningumui g, portfelis a tenkina tokią sąlygą:

$$\underset{a}{Min} \frac{1}{2} a^T Va, \qquad (11)$$

$$a^T X = x; \qquad (12)$$

čia $x = g - RF$, (13)

x yra perteklinis išorinio pageidaujamo pelningumo g pelningumas, esantis virš nerizikingo pelningumo.

Kiekvienas CML portfelis, kuriuo numatomas pelningumas $E(R_p)$, gali būti sudarytas naudojant nerizikingą vertybinį popierių ir portfelį a [2, p. 254]. Portfelyje esančių vertybinių popierių svoris w yra išreiškiamas taip:

$$w = \frac{E(R_p) - RF}{E(R_a) - RF}; \qquad (14)$$

iš čia $R_p = (1 - w)RF + wR_a$, (15)

toliau išeina, kad

$$E(R_p) = (1-w)RF + wE(R_a), \quad (16)$$

$$\sigma_p^2 = w^2\sigma_a^2. \quad (17)$$

Pastaba: kadangi portfelis a yra CML, portfelis w yra teigiamas. $\sigma_p = w\sigma_a$.

Alternatyviai galima apibrėžti $E(R_p)$ ir σ_p ryšį naudojant CML lygybę:

$$E(R_p) = R_f + \frac{E(R_a) - R_f}{\sigma_a}\sigma_p. \quad (18)$$

Detalesnei CML iliustracijai bus naudojamas portfelis a^*, $a^* = V^{-1}X$ (19)

yra *CML* portfelis. Reikia įrodyti, kad a^* yra sprendinys $(P1)$ esant tam tikroms x reikšmėms. Naudojamas Lagrange optimizavimo metodas, kurio išraiška yra:

$$L(a,\lambda) = \frac{1}{2}a^T Va + \lambda(x - a^T X). \quad (20)$$

Kadangi V yra teigiama matrica, svarbiausios sąlygos yra būtinos ir pakankamos visuotiniam minimumui. Svarbiausių sąlygų (prilyginant Lagrangean pirmus dalinius vedinius a ir λ nuliui) pelningumas bus toks:

$$a^T X = x \text{ ir } Va = \lambda X, \quad (21)$$

$$x = X^T V^{-1} X, \quad (22)$$

sprendinys pradiniai lygčiai yra $a = V^{-1}X$ ir $\lambda = 1$,

$$a^* = V^{-1}X,$$

a yra portfelis, priklausantis efektyvumo ribai. Taip pat a^* yra *CML* portfelis ir nėra *CML* atspindžio portfelis.

$$a^{*T} X = X^T V^{-1} X \quad (23)$$

Perteklinis pelningumas yra teigiamas, kadangi V taip pat yra teigiama. Nagrinėjant tokį CML modelį galima padaryti tam tikras išvadas:

a) jeigu $a^T 1 \neq 0$, tada liestinio portfelio t_{RF} svoriai yra portfelio a svoriai

$$t_{RF} = (a^T 1)^{-1} a; \quad (24)$$

b) jeigu $a^T 1 > 0$, $(a^T 1 < 0)$, liestinis portfelis yra CML (CML atspindžio) portfelis.

c) jeigu rizikingų vertybinių popierių svoriai portfelyje a yra lygūs nuliui ar ekvivalentiškai $a^T 1 = 0$, tada bus neribotas (baigtinis) liestinis portfelis (CML yra asimptotė efektyvios ribos hiperbolės) [2, p. 257].

Įrodymas. Liestinis portfelis yra vienintelis CML portfelis, netgi ir neturintis nerizikingų vertybinių popierių (RF) ar ekvivalentiškai rizikingų vertybinių popierių svoriai turi būti lygūs vienetui. Minėtą teiginį įrodo 1 išvada.

Kadangi perteklinis tikėtinas portfelio a pelningumas esant tam tikrai nerizikingumo normai yra teigiamas, perteklinis tikėtinas pelningumas t_{RF}, kuris gaunamas a padalinus iš $a^T 1$, yra teigiamas (ar neigiamas), jeigu $a^T 1 > 0$ (jei $a^T 1 < 0$), iš to išplaukia, kad portfelis t_{RF} yra ant CML (ar CML atspindyje).

Kai liestinis portfelis yra CML atspindyje, reikia papildomos pastabos, kad būtų identifikuotas CML portfelis. Tarkime, kad a yra portfelio ribos portfelis, tada $-a$ yra atspindžio portfelis, taigi portfelio ribos portfelis su tuo pačiu nuokrypiu, tik skirtingu vidurkiu.

$$E(R_{-a}) = 2RF - E(R_a). \quad (25)$$

$-a$ yra vienintelis efektyvios ribos portfelis, kuris skiriasi nuo a portfelio, tačiau turi tą patį nuokrypį (variaciją) kaip ir portfelis a. Jeigu a portfelis yra ant kapitalo rinkos tiesės, atspindžio portfelis yra ant neigiamo kapitalo rinkos tiesės nuolydžio atspindžio, ir atvirkščiai.

Kadangi portfelis $-a$ turi tokį patį nuokrypį kaip ir portfelis a, iš to išplaukia, kad $-a$ privalo būti atspindžio portfelis.

Minėtos svarbiausios sąlygos įrodo, kad CML portfelio, kuriame yra ir rizikingų, ir nerizikingų vertybinių popierių, kovariacijos visos yra lygios. Tai kainos santykis: EER vieneto rizikos įvertinimas yra vienodas visiems aktyvams.

Viena iš pirminių sąlygų, kad kiekvienas CML portfelis a ir kiekvienas rizikingas vertybinis popierius i yra lygūs:

$$\frac{COV(R_i, R_a)}{E(R_i) - RF} = \lambda \quad \forall i, i = 1, 2, ..., N \quad (26)$$

Iš minėtos formulės išplaukia, kad $R_i = R_a$, formulę $Va = \lambda X$ padauginus iš a^T gaunama

$$a^T Va = a^T X\lambda. \quad (27)$$

Kairioji lygybės pusė yra portfelio a variacija, o dešinioji pusė yra EER kapitalo rinkos tiesės portfelio a, esant nerizikingai palūkanų normai ir apskaičiuotam Lagrange daugikliui [2, p. 259].

Pertvarkius formulė atrodo taip:

$$\frac{VAR(R_a)}{E(R_a) - RF} = \lambda. \quad (28)$$

Po kelių anksčiau minėtų formulių dalybos ir pertvarkymo gaunama tokia lygybė:

$$E(R_i) = RF + \beta[E(R_a) - RF], \ \forall i,$$
$$i = 1, 2, ..., N. \quad (29)$$

Iš pastarosios formulės išvedama β_i:

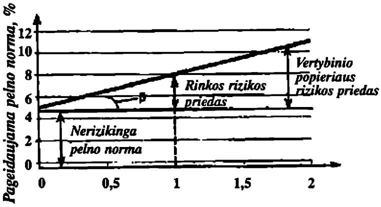
$$\beta_i = \frac{COV((R_i, R_a)}{VAR(R_a)}, \ \forall i,$$
$$i = 1, 2, ..., n, \quad (30)$$

o tai yra CAPM modelis arba vertybinių popierių rinkos tiesė (SML).

Grafinė CAPM modelio išraiška pateikiama 2 paveiksle.

SML tiesė parodo beta koeficiento ir pageidaujamos pelno normos priklausomybę.

Beta koeficientas parodo, kaip vertybinio popieriaus kaina reaguoja į rinkos jėgas: kuo lanksčiau kaina atsiliepia į rinkos pokyčius, tuo didesnis šio vertybinio popieriaus beta koeficientas. Todėl beta koeficientas vadinamas sisteminės rizikos, kurią lemia rinkos sąlygos, charakteristika.



2 pav. Vertybinių popierių rinkos tiesė

Šaltinis: Norvaišienė Rasa. Įmonės investicijų valdymas, p. 35.

Šis koeficientas apskaičiuojamas remiantis vertybinio popieriaus faktinio pelningumo ir faktinio rinkos pelningumo santykiu. Rinkos pelningumas paprastai matuojamas kaip visų akcijų pelningumo vidurkis [7, p. 34].

Visos vertybinių popierių rinkos beta koeficientas lygus 1. Kuo didesnis beta koeficientas, tuo rizikingesnis vertybinis popierius. Koeficientų reikšmės ir vertybinių popierių pelningumo pokyčių krypčių paaiškinimai pateikiami 1 lentelėje.

Vertybinio popieriaus rinkos linija skiriasi nuo kapitalo rinkos linijos. Vertybinio popieriaus rinkos linija yra grafinis CAPM modelio pavaizdavimas, kuris parodo betą ir reikalaujamą pelningumą. Kapitalo rinkos linija vaizduoja efektyvią ribą rinkos portfeliui ir parodo planuojamą pelningumą bei standartinį nuokrypį [5, p. 338].

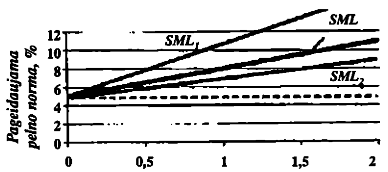
SML taip pat yra svarbi vertybinių popierių kainoms. Esant rinkos pusiausvyrai, kiekvienas instrumentas bus ant vertybinio popieriaus rinkos linijos, nes už tam tikrą riziką bus siūlomas atitinkamas pelningumas [5, p. 339].

Investicijų plotmėje labai svarbi yra infliacija. Numatomos infliacijos pokyčiai turi įtakos SML tiesei.

*1 lentelė. **Beta koeficientų reikšmių paaiškinimas***

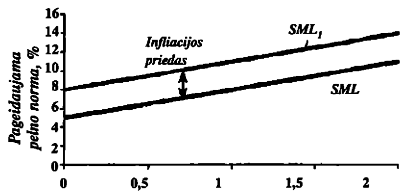
Beta koeficiento reikšmės	***Vertybinių popierių pelningumo pokyčio kryptis***	***Reikšmių interpretavimas***
2,0	Tokia pati kaip rinkos	Vertybiniai popieriai dvigubai rizikingesni nei rinka
1,0	Tokia pati kaip rinkos	Vertybinių popierių rizika lygi rinkos rizikai
0,5	Tokia pati kaip rinkos	Vertybinių popierių rizika perpus mažesnė nei rinkos rizika
0	Nėra priklausomybės	Vertybinių popierių rizika nesusijusi su rinkos rizika
–0,5	Priešinga nei rinkos	Vertybinių popierių rizika perpus mažesnė nei rinkos rizika, tik priešinga kryptimi
–1,0	Priešinga nei rinkos	Vertybinių popierių rizika lygi rinkos rizikai
–2,0	Priešinga nei rinkos	Vertybinių popierių rizika dvigubai didesnė už rinkos riziką, bet priešinga kryptimi

Šaltinis: Norvaišienė Rasa. Įmonės investicijų valdymas, 2004, p. 34.



*3 pav. **Vertybinių popierių rinkos tiesės reakcija į infliaciją***

Šaltinis: Ten pat, p. 36.



*4 pav. **SML rizikuoti linkusio investuotojo atžvilgiu***

Šaltinis: Ten pat, p. 35.

Jei investuotojai tikisi didesnės infliacijos, visoms savo pageidaujamoms pelno normoms jie priskirs didesnį infliacijos priedą, ir SML_1 pasislinks lygia greta su SML. Tiesės pasvirimo kampas nesikeis.

Investavimo sprendimams taip pat turi įtakos rizikos vengimo laipsnis. Investuotojų vengimo rizikuoti pokyčiai lemia vertybinių popierių tiesės nuolydį, t. y. rizikos priedą. Rizikuoti linkusio investuotojo SML tiesės pasvirimo kampas mažesnis ir atitinkamai mažesnė pageidaujama pelno norma (SML_2). O investuotojo, vengiančio rizikos, rizikos priedas didesnis ir pageidaujama pelno norma didesnė (SML_3), t. y. nelinkęs rizikuoti investuotojas pageidauja didesnės kompensacijos už riziką.

Originalų portfelio teorijos tęsinį pasiūlė Tobinas (Tobin), kuris į portfelio analizę įtraukė nerizikingą turtą – valstybės iždo vertybinius popierius. Šiuo atveju investuotojai nesinaudoja efektyviąja portfelių riba. Investuotojai gali padalyti savo kapitalą rizikingosioms ir nerizikingosioms investicijų pagal savo rizikos ir pelno kriterijų.

Turto įkainojimo modelis nustato numatomo pelningumo ir rizikos ryšį konkurencinėje rinkoje. Jis sukurtas atsižvelgiant į prielaidas, kurios apibrėžia investuotojų elgesį ir rinkos sąlygas. Šios prielaidos yra:

1) visi investuotojai vengia rizikos, kuri lygi portfelio pajamų (pelno) normos vidutiniam kvadratiniam nuokrypiui;

2) visi investuotojai turi vienodą laiko horizontą investiciniam sprendimui priimti;
3) visi investuotojai turi vienodą subjektyvų būsimo kiekvieno vertybinio popieriaus pelno ir rizikos įvertį;
4) rinkoje egzistuoja nerizikingoji investicija į turtą ir kiekvienas investuotojas gali skolintis arba skolinti neribotą jo kiekį su nerizikingąja palūkanų norma;
5) į visus vertybinius popierius kapitalą galima investuoti norimu santykiu, nėra išlaidų už sandorius, nėra mokesčių bei nepadengtojo pardavimo apribojimų;
6) visiems investuotojams laisvai prieinama ir vienodai galima informacija apie investicijas;
7) nusistovėjusi kapitalo rinkos pusiausvyra, t. y. rinkos kainos yra kliringo kainos (kainos, pagal kurias vykdomi kasdieniai atsiskaitymai kliringo kontoroje) [11, p. 265–266].

Vertybinių popierių numatomo pelningumo normos atitinka ilgalaikio turto įkainojimo modelio apribojimus: jie yra lygūs nerizikingai palūkanų normai plius vertybinių popierių beta, atsižvelgiant į bet kurį CML portfelį a, nustato portfelio a perteklinį tikėtiną pelningumą, didesnį nei nerizikinga norma. Taip pat toliau bus siekiama iliustruoti, kad paprastas tik rizikingų vertybinių popierių (hiperbolė) efektyvios ribos nustatymas yra specialus atlikto tyrimo atvejis. Pavaizduoti hiperbolę reikia dviejų skirtingų portfelių.Vienas portfelis yra liestinis portfelis t_∞, kurio pelningumo nuokrypis yra minimalus. Kitas portfelis yra taip pat liestinis portfelis t_0, tik šiuo atveju nerizikinga palūkanų norma yra lygi 0. Tačiau jeigu minimalus nuokrypio portfelis t_∞ turėtų nulinę tikėtiną reikšmę, t. y. $1^T V^{-1} E = 0$, tada portfelis t_0 visiškai neegzistuotų: nebūtų hiperbolės liestinės. Tokiu atveju galima pasirinkti kitą hiperbolinį portfelį, kuris būtų liestinis portfelis, atitinkantis poreikius esant bet kokiam apibrėžtam, nelygiam nuliui, nerizikingam pelningumui. Tai galima apibendrinti taip: jeigu $1^T V^{-1} E \neq 0$, tada liestiniai portfeliai t_∞ (kuris atitinka $a = V^{-1} 1$) ir t_0 (kuris atitinka $a = V^{-1} E$) apima efektyvią ribą rizikingų aktyvų – tik hiperbolę. Jeigu $1^T V^{-1} E = 0$, liestiniai portfeliai t_∞ ir t_c (kuris atitinka $a = V^{-1}(E - 1c)$, čia c yra apibrėžta nenuline konstanta) apima hiperbolę: vietoj hiperbolės dviejų asimptočių eina per pačią hiperbolę [2, p. 259].

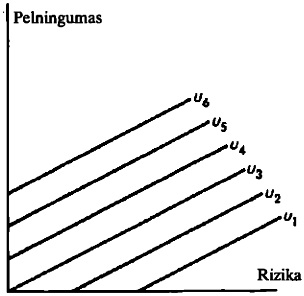
Merton 1972 m. įrodė, kad bet kurie du neidentiški hiperbolės portfeliai apima hiperbolę. Iš to išplaukia, kad liestinis portfelis yra hiperbolės portfelis.

Abejingumo kreivių reikšmė optimizuojant vertybinių popierių portfelį

Abejingumo kreivės investicijų plotmėje gali būti traktuojamos kaip metodas, naudojamas parinkinti labiausiai pageidaujamą portfelį. Šios kreivės vaizduoja investuotojo požiūrį į riziką ir pelningumą ir yra išreiškiamos dvimačiu grafiku, kurio vienoje ašyje pažymimas rizikos matas, t. y. standartinis nuokrypis, o kitoje – numatomas pelningumas.

Pabandysime iliustruoti rinkinį abejingumo kreivių tariamam investuotojui, kaip pateikta 5 paveiksle.

Iš pateiktos schemos matyti, kad abejingumo kreivės yra tiesinės ir lygiagrečios. Kuo aukštesnė kreivė, tuo labiau pageidaujama tokia situacija. Pateiktame paveiksle kreivės sunumeruotos nuo 1 iki 6 pagal jų vaizduojamos situacijos patrauklumą. Kiekvieno



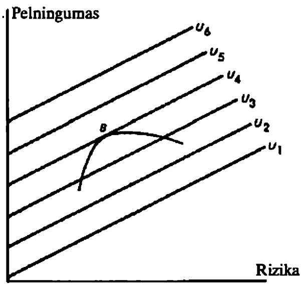
*5 pav. **Abejingumo kreivės***

Šaltinis: Fisher Donald E., Jordan Roland J. Security analysis and portfolio management, 2000, p. 491.

investuotojo uždavinys yra surasti galimo portfelio liestinę esant geriausiai (aukščiausiai) abejingumo kreivei. Jei yra sujungiama efektyvumo riba su abejingumo kreivėmis (6 pav.), nesunku pastebėti, kaip investuotojas gali išspręsti efektyvios ribos nustatymo klausimą.

Taškas B yra geriausias portfelis ir jis yra efektyvus, ir šiame taške efektyvumo riba yra abejingumo kreivės liestinė.

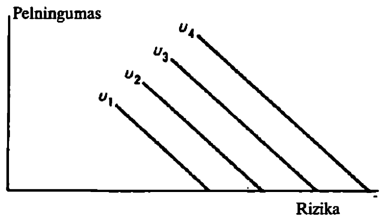
Daugelis investuotojų tikisi didesnio pelningumo esant papildomai rizikai, todėl abe-



*6 pav. **Abejingumo kreivės ir efektyvumo riba***

Šaltinis: Ten pat, p. 491.

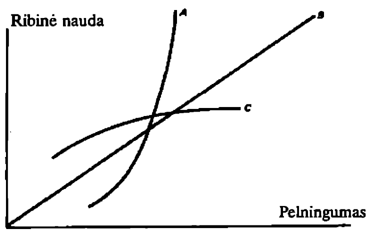
jingumo kreivės yra aiškiai (teigiamai) pasvirusios. 7 paveiksle vaizduojamas rinkinys abejingumo kreivių, kurios būdingos tiems investuotojams, kurie prisiima didesnę riziką. Tokio investuotojo abejingumo kreivės yra neigiamai pasvirusios ir priešingos pradinėms originalioms kreivėms.



*7 pav. **Rizikingo investuotojo abejingumo kreivės***

Šaltinis: Ten pat, p. 492.

Abejingumo kreivės pasvirimo laipsnis parodo investuotojo prisimintos rizikos mastą. Abejingumo kreivės gali būti ne tik tiesinės išraiškos. Tai iliustruoja 8 paveikslas.



*8 pav. **Pelningumo ir ribinės naudos kreivės***

Šaltinis: Ten pat, p. 494.

A kreivė iliustruoja didėjančią investuotojo ribinę naudą ir jo polinkį į riziką. B kreivė – pastovią ribinę naudą ir investuotojo neutralumą rizikai. C kreivė – nežymiai mažėjančią ribinę naudą ir žemą investuotojo rizikos prisiėmimo laipsnį.

Taigi galima padaryti tam tikras išvadas: investuotojui patrauklesnis tas portfelis, kuris bus ant abejingumo kreivės, esančios aukščiau ir dešiniau, nei tas, kuris išsidėstęs žemiau ir kairiau. Taip pat tikslinga pažymėti, kad investuotojas turi galimybę rinktis iš begalės abejingumo kreivių, t. y. esant kelioms kreivėms visada galima tarp jų nubrėžti naują.

Optimalaus portfelio sudarymas

Atliekant investiciją, pradinės kapitalo išlaidos žinomos, tačiau grąžos (pajamų) dydis yra neapbrėžtas. Prielaida, kad investicija apima tik vieną periodą, kartais pakankamai gerai aproksimuoja kelių periodų investiciją. Tačiau daugelis investicijų, pavyzdžiui, viešai prekiaujamos akcijos, nėra susietos su vienu periodu, kadangi jos gali būti bet kada parduotos, o dividendai išmokami periodiškai. Nepaisant to, tokią investiciją galima nagrinėti kaip vieno periodo investiciją. Investicinis neapibrėžtumas paprastai nagrinėjamas vidurkio-dispersijos atžvilgiu. Remiantis Markowitz teorija tariama, kad investuotojai vengia rizikos, t. y. jie nori kiek įmanoma mažesne rizika gauti numatomą pelną. Paprastai investuotojai sudaro investicinį portfelį, ir tai reiškia riziką, susijusią ne su viena konkrečia investicija, o su daugeliu investicijų.

Teorijoje rizika apibrėžiama kaip numatomo pelno už investiciją vidutinis kvadratinis nuokrypis. Šis dydis rodo galimą pelno iš investicijos kitimą per tam tikrą laiką. Mokėdami įvertinti riziką, galime kurti modelius, susietus su rizika ir numatomu pelnu bei paaiškinti diversifikavimą arba investicijos paskirstymo procesą [11, p. 24].

Prieš pradedant sudaryti optimalų portfelį, tikslinga išsiaiškinti pačią optimalaus portfelio prasmę. Kaip, žinant nerizikingą palūkanų normą, nustatyti optimalios rizikos portfelį.

Optimalios rizikos portfelis yra liestinės taškas tarp kapitalo rinkos tiesės CML ir efektyvumo ribos.

Kadangi optimalus portfelis yra palei efektyvumo ribą, liestinės taškas yra ant tiesės su maksimalia liestine tarp tos linijos ir horizontalios linijos.

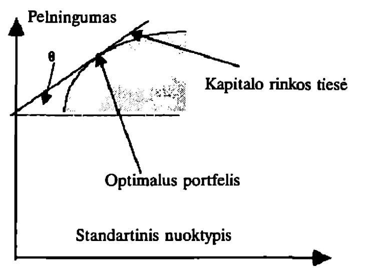
Toks sprendimas yra pakankamai geras, kadangi nėra lengva nustatyti abejingumo kreives kiekvienam sprendimo priėmėjui.

$$Maxtn\theta = \frac{R_m - r}{\sqrt{\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\alpha_k\alpha_j\sigma_{kj}}}, \tag{31}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i = 1, \tag{32}$$

α_i yra i akcijos svoris portfelyje; σ_{kj} yra k ir j akcijų kovariacija; R_m – portfelio pelningumas; r – nerizikinga palūkanų norma; m – analizėje naudojamų akcijų skaičius [9, p. 2].

Minėtus samprotavimus galima išreikšti grafiškai.



9 pav. Kapitalo rinkos tiesė, efektyvumo riba ir optimalus portfelis

Šaltinis: Pareja Ignacio. Optimal portfolio selection, 2001, p. 3.

Tirti buvo pasirinktos keturių įmonių (sąlyginai žymimų A, B, C ir D) akcijos ir stebėtas jų pelningumo kitimas per metus mėnesio intervalu.

2 lentelė. Įmonių akcijų kainų pelningumai ir statistiniai jų įverčiai

Mėnuo	*A akcija*	*B akcija*	*C akcija*	*D akcija*
1	16,35%	15,35%	16,90%	8,45%
2	9,80%	12,77%	7,03%	5,78%
3	–3,70%	7,89%	7,70%	3,45%
4	12,40%	15,89%	17,09%	5,00%
5	17,70%	6,98%	28,00%	10,67%
6	7,89%	7,97%	16,98%	7,99%
7	–1,20%	–8,67%	23,45%	7,23%
8	4,50%	9,99%	12,10%	–8,67%
9	23,00%	–5,89%	13,98%	6,90%
10	–7,89%	7,98%	7,77%	4,95%
11	–9,80%	6,35%	–2,43%	3,70%
12	7,30%	–2,12%	–5,40%	–2,66%
Vidurkis	6,36%	6,21%	11,93%	4,40%
Variacija	1,08%	0,62%	0,94%	0,28%
Standartinis nuokrypis	10,37	7,87	9,71	5,29
Svoriai	25%	25%	25%	25%

Antroje lentelėje pateikti skirtingų įmonių akcijų kainų pelningumai, apskaičiuotas kiekvienos akcijos pelningumo vidurkis, variacija, standartinis nuokrypis bei pateikti pradiniu momentu pasirinkti akcijų svoriai portfelyje.

Toliau 3 lentelėje pateikiama perteklinio pelningumo matrica.

Transponuota matrica pateikiama 4 lentelėje, ji apskaičiuojama panaudojus programos *Excel* transponavimo funkciją.

Toliau skaičiuojama kovariacinė matrica, panaudojus COVAR funkciją.

Kovariacija – tai absoliutus dviejų instrumentų pelningumų asociacijos laipsnio rodiklis. Kovariacija yra dydis, kuriuo per tam tikrą

3 lentelė. Akcijų kainų perteklinių pelningumų matrica

Mėnuo	*A akcija*	*B akcija*	*C akcija*	*D akcija*
1	9,99%	9,14%	4,97%	4,05%
2	3,44%	6,56%	–4,90%	1,38%
3	–10,06%	1,68%	–4,23%	–0,95%
4	6,04%	9,68%	5,16%	0,60%
5	11,34%	0,77%	16,07%	6,27%
6	1,53%	1,76%	5,05%	6
7	–7,56%	–14,88%	11,52%	2,83%
8	–1,86%	3,78%	0,17%	–13,07%
9	16,64%	–12,10%	2,05%	2,50%
10	–14,25%	1,77%	–4,16%	0,55%
11	–16,16%	0,14%	–14,36%	–0,70%
12	0,94%	–8,33%	–17,33%	–7,06%

tarpą du kintamieji kovarijuoja (juda kartu). Kovariacija gali būti:

- teigiama, kai dviejų instrumentų pelningumo rodikliai tuo pačiu metu kinta ta pačia kryptimi;
- neigiama, kai dviejų instrumentų pelningumo rodikliai kinta priešingomis kryptimis;
- nulinė, kai dviejų instrumentų pelningumai yra nepriklausomi [5, p. 330].

Tolesniems skaičiavimams apibrėžiamas akcijų svorių portfelyje vektorius.

Panaudojus SUMPRODUCT funkciją apskaičiuojamas vidutinis portfelio pelningumas, kuris nagrinėjamu atveju yra 7,225%.

Svorių vektorių padauginus iš kovariacijos matricos gaunami duomenys, kurie pateikti 7 lentelėje.

4 lentelė. Akcijų kainų perteklinių pelningumų transportuota matrica

Mėnuo	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*
A akcija	16,35%	9,80%	–3,70%	12,40%	17,70%	7,89%	–1,20%	4,50%	23,00%	–7,89%	–9,80%	7,30%
B akcija	15,35%	12,77%	7,89%	15,89%	6,98%	7,97%	–8,67%	9,99%	–5,89%	7,98%	6,35%	–2,12%
C akcija	16,90%	7,03%	7,70%	17,09%	28,00%	16,98%	23,45%	12,10%	13,98%	7,77%	–2,43%	–5,40%
D akcija	8,45%	5,78%	3,45%	5,00%	10,67%	7,99%	7,23%	–8,67%	6,90%	4,95%	3,70%	–2,66%

*5 lentelė. **Akcijų kainų perteklinių pelningumų kovariacinė matrica***

	A akcija	*B akcija*	*C akcija*	*D akcija*
A akcija	0,0098571	0,009369915	-0,0004237	0,0009752
B akcija	0,0002972	0,006773485	0,0021389	-0,0003821
C akcija	0,0043186	0,002138873	0,0183303	-0,0075811
D akcija	0,0014695	-0,00038209	-0,0075811	0,0225813

*6 lentelė. **Akcijų svorių portfelyje vektorius***

A akcija	*B akcija*	*C akcija*	*D akcija*
25%	25%	25%	25%

Portfelio variacijos koeficientas yra 0,0038688, standartinis nuokrypis 0,0621993. Tolesniems skaičiavimams bus naudojama nerizikinga palūkanų norma, kuri yra 3,5 proc. *Excel* programos SOLVER operatoriaus pagalba bus maksimizuojama $tn\theta$ reikšmė, t. y. ieškoma tokių portfelyje esančių akcijų svorių, kad būtų pasiektas maksimalus pelningumas esant tam tikrai rizikos.

*7 lentelė. **Akcijų svorių portfelyje vektoriaus daugybos iš kovariacijos matricos rezultatai***

Svorių vektorius x kovariacijos matrica	*A akcija*	*B akcija*	*C akcija*	*D akcija*
	0,0039856	0,0044750	0,0031161	0,0038983

Skaičiuoti reikalingi pradiniai duomenys pateikiami 10 paveiksle.

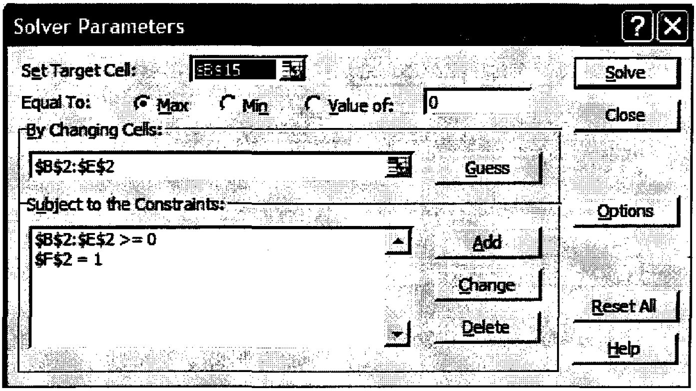
Užpildomi atitinkami SOLVER parametrai, t. y. pažymima maksimizuojama funkcija $tn\theta$, nurodoma keičiamų svorių vieta (pradiniu momentu buvo pasirinkti vienodi svoriai į visas akcijas, kurie po maksimizavimo bus pakeisti). Taip pat pasirenkama sąlyga, jog bendra svorių suma yra lygi 1, ir tai, kad portfelyje nėra neigiamų svorių, t. y. nėra trumpų pozicijų.

Po skaičiavimo gauti rezultatai pateikti 12 paveiksle.

Po atlikto portfelio optimizavimo patariama investuoti kitomis proporcijomis, nei buvo numatyta tyrimo pradžioje, t. y. į A akcijas 9,08 proc., į B akcijas 41,6 proc., C akcijas 24,54 proc., D akcijas 24,78 proc. kapitalo. Tokiu būdu bus pasiektas maksimalus pelningumas esant tam tikro dydžio rizikai.

	A	B	C	D	E	F
1		A akcija	B akcija	C akcija	D akcija	
2	Svoriai	25,00%	25,00%	25,00%	25,00%	100,00%
3						
4						
5	Portfelio pleningumas	7,22500%				
6						
7		A akcija	B akcija	C akcija	D akcija	
8	Svorių vektorius x kovariacijos matrica	0,0039856	0,0044750	0,0031161	0,0038983	
9						
10	Portfelio variacijos koeficientas	0,0038688				
11	Standartinis nuokrypis	0,0621993				
12						
13	Nerizikinga palūkanų norma	3,50%				
14						
15	Max tn	59,89%				

*10 pav. **Skaičiavimo pagrindiniai duomenys***



11 pav. SOLVER parametrai

	A	B	C	D	E	F
1		A akcija	B akcija	C akcija	D akcija	
2	Svoriai	9,08%	41,60%	24,54%	24,78%	100,00%
3						
4						
5	Portfelio pleningumas	7,17814%				
6						
7		A akcija	B akcija	C akcija	D akcija	
8	Svorių vektorius x kovariacijos matrica	0,0024431	0,0040989	0,0034714	0,0036643	
9						
10	Portfelio variacijos koeficientas	0,0036868				
11	Standartinis nuokrypis	0,0607189				
12						
13	Nerizikinga palūkanų norma	3,50%				
14						
15	Max tn	61,35%				

12 pav. Optimizavimo rezultatai

Išvados

1. Kiekvienas investuotojas turi balansuoti tarp rizikos ir pelningumo, kad gautų maksimalią naudą. Tai padeda pasiekti vertybinių popierių portfelio optimizavimo modeliai, kurių pagalba pasirenkamos optimalios investicijų paskirstymo proporcijos.

2. Kapitalo rinkos tiesė yra viena iš svarbiausių priemonių finansų, o ypač investicijų, tiek studijų, tiek praktinėje srityje. Investuotojai, turintys vertybinių popierių portfelius, kurie nėra ant CML tiesės, nerimauja dėl rizikos, kurios jie nepajėgs kompensuoti. Efektyvumo riba, sudaryta iš rizikingo turto,

visada yra nutolusi nuo kapitalo rinkos tiesės, kuri kyla iš mažiau rizikingo taško ir yra efektyvumo ribos liestinė.

3. Remiantis ilgalaikio turto įkainojimo modeliu, optimalus portfelis, kurį nusako liestinės taškas tarp kapitalo rizikos tiesės ir efektyvumo ribos ir sudarytas iš atitinkamų proporcijų rizikingų ir nerizikingų vertybinių popierių esant tam tikrai rizikai yra maksimizuojamas portfelio pelningumas. Toks optimalumo apibrėžimas yra pagrįstas ir tuo atveju, kai prisiimta rizika yra mažesne, nei yra apibrėžta efektyvumo ribos.

4. Optimalaus portfelio formavimui, t. y. rizikos lygio ir pelningumo įvertinimui, yra skaičiuojami tokie rodikliai: vidurkis, standartinis nuokrypis, atskirų vertybinių popierių variacija. Kitas žingsnis optimalaus portfelio link yra svorių įvertinimas, portfelio rizikos ir pelningumo apskaičiavimas, kovariacijos įvertinimas ir funkcijos $tn\theta$ maksimizavimas.

LITERATŪRA

1. Chen Jing. Where is the efficient frontier [interaktyvus]. 2000 June [žiūrėta 2004 m. liepos 6 d.]. Prieiga per internetą: // <http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=239048>

2. Feldman David, Reisman Haim. Simple construction of the efficient frontier // European Financial Management. Vol. 9, Issue 2, 2003 June, p. 251–259.

3. Fischer Donald E., Jordan Ronald J. Security analysis and portfolio management. USA: Prentice-Hall, 2000. 559 p.

4. Фабоцційб Фрэнк. Управление инвестициями. Москва: Инфра, 2000. 931 с. ISBN 5-86225-864-7.

5. Kancevičius Gitanas. Finansai ir investicijos. Vilnius, 2003. 880 p.

6. Найман Эрик Л. Малая энциклопедия Трейдера. К. ВИРА-Р: Альфа Капитал, 2002. 378 с.

7. Norvaišienė Rasa. Įmonės investicijų valdymas. Kaunas: Technologija, 2004. 206 p.

8. Optimal portfolio [interaktyvus]. [žiūrėta 2004 m. liepos 10 d.]. Prieiga per internetą: <http://www.finflowholdings.com/optimal_portfolio.shtml>

9. Pareja Ignacio Vélez. Optimal portfolio selection [interaktyvus]. 2001 August 8 th [žiūrėta 2004 m. birželio 29 d.]. Prieiga per internetą: // <http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=234883>

10. Strong Robert A. Portfolio construction, management & protection. USA: South-Western College Publishing, 2000. 601 p.

11. Valakevičius Eimutis. Investicijų mokslas. Kaunas: Technologija, 2002. 324 p.

INTERNALS OF OPTIMAL PORTFOLIO CONSTRUCTION

Deimantė Vasiliauskaitė

Summary

The purpose with this note is to rescue a simple procedure presented by Black (1972), Merton (1973) and later by Levy and Sarnat (1982), Elton and Gruber (1995) and Benninga (1997). They just propose that the optimal portfolio can be found maximizing the slope of the line that joins the point of risk-free return and the efficient frontier. When this maximum tangent is reached, that line is the capital market line (CML) (it is tangent to the efficient frontier).

This is a simple procedure that does not require one to calculate the efficient frontier and is an easy task with Excel Solver. It is just one point of the efficient frontier.

In this article are provided simple methods of constructing known results. At the core of the methods is the identification of a simple concise basis that spans the Capital Market Line (CML). It is shown that a portfolio whose risky assets weights are the

product of the inverse variance-covariance matrix of (nonredundant) security rates of return times the vector of the excess expected rates of return over the risk-free rate is a CML portfolio. This portfolio and the risk-free security span the CML. In addition, with this basis, there is immediate construction of the efficient frontier of risky assets (the "hyperbola"), "tangency" portfolios, "reflection" portfolios, and a CAPM relationship. Used method is quick and simple. It is easy to derive, teach, implement, interpret, and remember.

In a well developed financial market with liquid short term fixed income trading, the volatility of short term fixed income securities forms a continuous spectrum that converges to zero, the volatility of riskless asset. This means that the attainable combinations of risky assets contain the whole region under the capital market line and the capital market line is the efficient frontier for the risky assets.

According to the CAPM theory, a portfolio that lies in the efficient frontier and combined with certain proportion of risk free investment, and given a desired risk level, maximizes the return of the combined portfolio. This definition is valideven if the desired risk level is less than the minimum defined by the efficient frontier.

That optimal risky portfolio is just the point of tangency between the Capital Market Line and the efficient frontier. As this optimal portfolio has to lie along the efficient frontier, then the point of tangency is located at the line with the maximum tangent between that line and the horizontal line. This solution is very good because it is not easy to détermine the indifference curves for each decision maker.

According to the CAPM theory, the investor will prefer a position in the "market portfolio" either levered or unlevered. Then, the optimal portfolio is given by this optimization problem.

Įteikta 2004 m. birželio mėn.