PERIODINĖS HURVICO DZETA FUNKCIJOS REIKŠMIŲ PASISKIRSTYMAS SU SVORIU

Ieva Žalytė, Roma Kačinskaitė

Šiaulių universitetas, Informatikos, matematikos ir e. studijų institutas

1. Įvadas

Skaičių teorijoje viena iš žinomiausių ir daugiausia nagrinėtų yra Rymano dzeta funkcija $\zeta(s)$; čia s yra kompleksinis kintamasis, $s = \sigma + it$. Pusplokštumėje $\sigma > 1$ ji yra apibrėžiama Dirichlė eilute arba Oilerio sandauga pagal pirminius skaičius

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

ir analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą $\mathbf{C}$; čia p žymi pirminį skaičių. Taškas $s = 1$ yra funkcijos $\zeta(s)$ paprastasis polius su reziduumu 1.

Tarp dzeta funkcijų yra tokių, kurių statistinės savybės priklauso nuo tam tikrų parametrų, įeinančių į jų apibrėžimą, aritmetinės prigimties. Viena iš jų – Hurvico dzeta funkcija $\zeta(s, \alpha)$. Sakykime, kad α yra fiksuotas parametras, $0 < \alpha \leq 1$. Pusplokštumėje $\sigma > 1$ funkcija $\zeta(s, \alpha)$ yra apibrėžiama Dirichlė eilute

$$\zeta(s, \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+\alpha)^s}$$

ir analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus paprastąjį polių taške $s = 1$ su reziduumu 1. Kai parametras $\alpha = 1$, Hurvico dzeta funkcija tampa Rymano dzeta funkcija $\zeta(s)$, o jei $\alpha = \frac{1}{2}$, ji yra užrašoma tokiu būdu

$$\zeta\left(s, \frac{1}{2}\right) = 2^s L(s, \chi);$$

čia $L(s, \chi)$ yra Dirichlė L funkcija, χ – charakteris mod 2. Kai $\alpha = \frac{a}{q}$, $a, q \in \mathbf{N}$ yra racionalusis skaičius, kuris nelygus nei $\frac{1}{2}$, nei 1, funkciją $\zeta(s, \alpha)$ galime išreikšti Dirichlė L funkcijų tiesine kombinacija, t. y.

$$\zeta\left(s, \frac{a}{q}\right) = q^s \sum_{\chi} \chi(a) L(s, \chi);$$

čia χ yra Dirichlė charakteris moduliu q. Bendru atveju Hurvico dzeta funkcija neturi išraiškos Oilerio sandauga pagal pirminius skaičius. Kaip matome, jos savybės priklauso nuo parametro α aritmetinės prigimties.

Dar viena iš dzeta funkcijų, kurios elgesiui įtakos turi parametras, – dzeta funkcija su periodiniais koeficientais, kurią 2006 m. apibrėžė A. Javtokas ir A. Laurinčikas [1].

Tegul $\mathbf{a} = \{a_m : m \in \mathbf{N} \cup \{0\}\}$ yra periodinė su mažiausiu periodu $k \in \mathbf{N}$ kompleksinių skaičių a_m seka, o $\alpha \in (0,1]$ yra fiksuotas parametras. Pusplokštumėje $\sigma > 1$ galima apibrėžti tokią dzetą funkciją

$$\zeta(s, \alpha; \mathbf{a}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{(m+\alpha)^s}. \tag{1}$$

Ji yra vadinama periodine Hurvico dzeta funkcija. Iš sekos $\mathbf{a}$ periodiškumo turime, kad toje pat pusplokštumėje funkciją $\zeta(s, \alpha; \mathbf{a})$ galima užrašyti Hurvico dzeta funkcijų tiesine kombinacija, t. y.

$$\zeta(s, \alpha; \mathbf{a}) = \frac{1}{k^s} \sum_{l=0}^{k-1} a_r \zeta\left(s; \frac{l+\alpha}{k}\right). \tag{2}$$

Pažymėkime

$$A := \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} a_l .$$

Kadangi funkcija $\zeta(s, \alpha)$ turi paprastąjį polių taške $s = 1$ su reziduumu 1, todėl (2) lygybe periodinę Hurvico dzeta funkciją analiziškai pratęsiame į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus galbūt paprastąjį polių taške $s = 1$ su reziduumu A. Be to, jei $A = 0$, funkcija $\zeta(s, \alpha; \mathbf{a})$ yra analizinė visoje baigtinėje s-plokštumoje, t. y. ji yra sveikoji funkcija.

Dzeta funkcijų asimptotinį elgesį galima aprašyti ribinėmis teoremomis silpnojo tikimybinių matų konvergavimo prasme įvairiose funkcinėse erdvėse. $B(S)$ pažymėkime erdvės S Borelio aibių klasę, o P_n ir P tegul yra tikimybiniai matai erdvėje $(S, B(S))$. Sakome, kad tikimybinis matas P_n silpnai konverguoja į matą P, jei visoms aprėžtoms tolydžioms funkcijoms $f : S \to \mathbf{R}$ teisinga lygybė

$$\lim_{n\to\infty}\int_S f dP_n = \int_S f dP .$$

Tolydžias ribines teoremas Hurvico dzeta funkcijai racionaliojo arba transcendenčiojo parametro α atžvilgiu įrodė A. Laurinčikas ir R. Garunkštis [2]. Periodinės Hurvico dzeta funkcijos reikšmių pasiskirstymą nagrinėjo A. Javtokas, R. Kačinskaitė, A. Laurinčikas, R. Macaitienė ir kiti matematikai (žr. [3–5]).

Dzeta funkcijoms taip pat galima įrodyti ribines teoremas su svoriu, kai be pagrindinės tiriamos funkcijos yra įvedama vadinamoji svorio funkcija, kuri paprasčiausiu atveju yra aprėžtos variacijos funkcija. Tolydžias tokio tipo ribines teoremas Rymano bei Lercho dzeta funkcijoms, taip pat bendrosioms Dirichlė eilutėms įvairiose funkcinėse erdvėse įrodė R. Garunkštis, J. Genys, A. Laurinčikas, G. Misevičius ir kiti (žr. [6–13]).

Tolydžiąją ribinę teoremą su svoriu periodinei Hurvico dzeta funkcijai kompleksinėje plokštumoje įrodė O. Lukašonok [14]. Pateiksime jos formuluotę. Sakykime, kad $w(t)$ yra teigiama aprėžtos variacijos funkcija intervale $[T_0, \infty]$, $T_0 > 0$, tokia, kad

$$\lim_{T\to\infty} U(T, w) = \lim_{T\to\infty}\int_{T_0}^{T} w(t)dt = +\infty .$$

Tarkime, kad $\sigma > \frac{1}{2}$, bet $\sigma \neq 1$, o visiems $v \in \mathbf{R}$ teisingas įvertis

$$\int_{T_0+v}^{T+v} w(u-v)\left|\zeta(\sigma+it,\alpha;\mathbf{a})\right|^2 dt \ll U(1+|v|). \tag{3}$$

$I_A(t)$ pažymėkime aibės A indikatorių.

A teorema. *Sakykime, kad α yra transcendentusis skaičius ir $\sigma > \frac{1}{2}$, o svorio funkcija $w(t)$ tenkina (3) sąlygą. Tada erdvėje* $(\mathbf{C}, B(\mathbf{C}))$ *egzistuoja tikimybinis matas P toks, kad, kai $T \to \infty$, matas*

$$\frac{1}{U}\int_{T_0}^{T} w(t) I_{\{t\in[0,T]:\ \zeta(\sigma+it,\alpha;\mathbf{a})\in A\}} dt,\ A \in B(\mathbf{C}),$$

silpnai į jį konverguoja.

Mūsų tikslas – įrodyti diskretų A teoremos analogą.

Priminsime, kad, nagrinėjant tolydųjį dzeta funkcijų reikšmių pasiskirstymą, tiriamas aibės $\{t \in [0,T] : \varphi(\sigma + it) \in A\}$ dažnis; čia $\varphi(s)$ yra tam tikra dzeta funkcija. Diskrečiuoju atveju analizuojama aibė $\{0 \le l \le N : \varphi(\sigma + ihl) \in A\}$, t. y. kai funkcijos $\varphi(s)$ kompleksinio kintamojo menamoji dalis įgyja reikšmes iš tam tikros aritmetinės progresijos su žingsniu h. Paminėsime, kad diskrečiąsias ribines teoremas su svoriu Matsumoto dzeta funkcijai kompleksinėje plokštumoje įrodė antroji autorė [15–16].

2. Pagrindinės teoremos formulavimas

Sakykime, kad α yra transcendentusis skaičius, o $h > 0$ yra fiksuotas toks, kad $\exp\left(\frac{2\pi}{h}\right)$ yra racionalusis skaičius.

Tarkime, kad $N \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. Sakykime, kad $w(l)$ yra realioji baigtinės variacijos intervale $[0, \infty)$ funkcija, tokia, kad, kai $N \to \infty$,

$$U = U(N, w) = \sum_{l=0}^{N} w(l) \to \infty .$$

Tegul

$$\mu_{N,w}(\ldots) = \frac{1}{U} \sum_{\substack{l=0 \\ \ldots}}^{N} w(l),$$

o vietoje daugtaškio įrašysime sąlygas, kurias tenkina l.

$P_{N,w}(A)$ pažymėkime tikimybinį matą erdvėje $(\mathbf{C}, B(\mathbf{C}))$, t. y.

$$P_{N,w}(A) = \mu_{N,w}\,(\zeta(\sigma + ilh, \alpha; \mathbf{a}) \in A),\ \sigma > \tfrac{1}{2}.$$

Sakykime, kad svorio funkcija $w(l)$ ir periodinė Hurvico dzeta funkcija $\varsigma(s, \alpha; \mathbf{a})$ tenkina įvertį

$$\int_{\tau}^{T+\tau} w(t-\tau)\left|\zeta(\sigma + it, \alpha; \mathbf{a})\right|^2 dt \ll U\left(1 + |\tau|\right) \tag{4}$$

su realiuoju τ.

1 teorema. *Sakykime, kad α, h, funkcijos $w(l)$ ir $\zeta(s, \alpha; \mathbf{a})$ tenkina anksčiau išvardytas sąlygas. Kai $\sigma > \frac{1}{2}$, erdvėje* $(\mathbf{C}, B(\mathbf{C}))$ *egzistuoja tikimybinis matas P, į kurį, kai $N \to \infty$, silpnai konverguoja tikimybinis matas $P_{N,w}(A)$.*

3. Tarpiniai rezultatai

Tam, kad galėtume įrodyti 1 teoremą, mums reikės tam tikrų pagalbinių rezultatų.

Pirmiausia įrodysime diskrečiąją ribinę teoremą su svoriu tore, kuri yra svarbiausia visame įrodyme.

Sakykime, kad γ yra vienetinis apskritimas kompleksinėje plokštumoje. Apibrėžkime torą

$$\Omega = \prod_{m=0}^{\infty} \gamma_m ;$$

čia $\gamma_m = \gamma$ visiems Ω yra kompaktinė topologinė Abelio grupė. Todėl erdvėje $(\Omega, B(\Omega))$ galime apibrėžti tikimybinį Haro matą m_H, tokiu būdu gaudami tikimybinę erdvę $(\Omega, B(\Omega), m_H)$.

Erdvėje $(\Omega, B(\Omega))$ apibrėžkime tikimybinį matą

$$Q_{N,w}(A) = \mu_{N,w}\left(\left((m+\alpha)^{-ilh} : m \in \mathbf{N} \cup \{0\}\right) \in A\right),\ A \in B(\Omega).$$

2 lema. *Tarkime, kad α ir h yra tokie patys kaip ir 1 teoremoje. Tada tikimybinis matas $Q_{N,w}(A)$, kai $N \to \infty$, silpnai konverguoja į Haro matą m_H.*

<u>Įrodymas.</u> Duali grupė Ω yra izomorfinė $\bigoplus_{m=0}^{\infty} Z_m$; čia $Z_m = \mathbf{Z}$ visiems $m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, o $\mathbf{Z}$ žymi sveikųjų skaičių aibę.

Elementas

$$\underline{k} = \{k_m : m \in \mathbf{N} \cup \{0\}\} \in \bigoplus_{m=0}^{\infty} Z_m$$

į Ω yra atvaizduojamas taip

$$\omega \to \omega^{\underline{k}} = \prod_{m=0}^{\infty} \omega^{k_m}(m);$$

čia $\omega(m)$ yra elemento $\omega \in \Omega$ projekcija į koordinatinę erdvę γ_m, $m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, be to, tik baigtinis kiekis sveikųjų skaičių k_m yra nenuliai. Mato $Q_{N,w}$ Furjė transformacija $g_{N,w}(\underline{k})$ yra apibrėžiama tokiu būdu

$$g_{N,w}(\underline{k}) = \int_{\Omega} \prod_{m=0}^{\infty} \omega^{k_m}(m)\,dQ_{N,w} ;$$

čia, kaip ir anksčiau, tik baigtinis skaičius sveikųjų k_m yra nenuliai. Todėl iš mato $Q_{N,w}$ apibrėžimo gauname

$$g_{N,w}(\underline{k}) = \frac{1}{U}\sum_{l=0}^{N} w(l)\prod_{m=0}^{\infty}(m+\alpha)^{-ik_m lh} = \frac{1}{U}\sum_{l=0}^{N} w(l)\exp\left\{-ilh\sum_{m=0}^{\infty} k_m \log(m+\alpha)\right\}. \tag{5}$$

Kadangi α yra transcendentusis skaičius, aibė $\{\log(m + \alpha): m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ yra tiesiškai nepriklausoma virš racionaliųjų skaičių lauko **Q**. Todėl $\sum_{m=0}^{\infty} k_m \log(m+\alpha) = 0$ tada ir tik tada, kai $\underline{k} = \underline{0}$. Be to,

$$\exp\left\{\sum_{m=0}^{\infty} k_m \log(m+\alpha)\right\} = \prod_{m=0}^{\infty}(m+\alpha)^{k_m}$$

yra iracionalusis. Pagal h pasirinkimą, $\exp(\frac{2\pi r}{h})$ yra racionalusis skaičius visiems $r \in \mathbb{Z}$. Iš čia turime, kad, kai $\underline{k} \neq \underline{0}$,

$$\exp\left\{-ih\sum_{m=0}^{\infty} k_m \log(m+\alpha)\right\} \neq 1.$$

Dar daugiau, atsižvelgus į funkcijos $w(l)$ apibrėžimą, iš (5) lygybės turime, kad, kai $\underline{k} \neq \underline{0}$,

$$\sum_{l=0}^{N} w(l)\exp\left\{-ilh\sum_{m=0}^{\infty} k_m \log(m+\alpha)\right\} = O\left(\left|U\sum_{m=0}^{\infty} k_m \log(m+\alpha)\right|^{-1}\right);$$

čia tik baigtinis skaičius k_m yra nenuliai.

Perėję prie ribos, kai $N \to \infty$, iš pastarojo įverčio ir (5) turime

$$\lim_{N\to\infty} g_{N,w}(\underline{k}) = \begin{cases} 1, & \text{kai } \underline{k} = \underline{0}, \\ 0, & \text{kai } \underline{k} \neq \underline{0}. \end{cases}$$

Remiantis 1.4.2 teorema iš [17], matas $Q_{N,w}$, kai $N \to \infty$, silpnai konverguoja į tikimybinį Haro matą m_H. Lema įrodyta.

Kitas žingsnis įrodant 1 teoremą – diskreti ribinė teorema su svoriu absoliučiai konverguojančioms eilutėms.

Sakykime, kad $\sigma_1 > \frac{1}{2}$ yra fiksuotas skaičius, $m, n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. Pažymėkime

$$v_n(m,\alpha) = \exp\left\{-\left(\frac{m+\alpha}{n+\alpha}\right)^{\sigma_1}\right\}$$

ir apibrėžkime eilutę

$$\zeta_n(s,\alpha;\mathbf{a}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m v_n(m,\alpha)}{(m+\alpha)^s}. \tag{6}$$

Ši eilutė absoliučiai konverguoja pusplokštumėje $\sigma > \frac{1}{2}$ (žr. [1]).

3 lema. *Tarkime, kad α, h ir w(l) yra tokie pat kaip 1 teoremoje. Tuomet, kai $N \to \infty$, tikimybinis matas*

$$P_{N,w,n}(A) := \mu_{N,w}(\zeta_n(\sigma + ilh, \alpha; \mathbf{a}) \in A), \qquad A \in B(\mathbf{C}),$$

silpnai konverguoja į tam tikrą tikimybinį matą P_n, apibrėžtą erdvėje $(\mathbf{C}, B(\mathbf{C}))$.

Įrodymas. Funkciją $u_n : \Omega \to \mathbf{C}$ apibrėžkime formule

$$u_n(\omega) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m \omega(m) v_n(m,\alpha)}{(m+\alpha)^s}, \qquad \omega \in \Omega.$$

Ji yra tolydi, nes (6) eilutė konverguoja absoliučiai, o pastaroji eilutė dar ir tolygiai ω atžvilgiu pusplokštumėje $\sigma > \frac{1}{2}$. Kadangi

$$u_n\left(\left\{(m+\alpha)^{-ihl} : m \in \mathbf{N} \cup \{0\}\right\}\right) = \zeta_n(\sigma + ihl, \alpha; \mathbf{a}),$$

tai $P_{N,w,n} = Q_{N,w}u_n^{-1}$. Be to, pritaikę 2.1 ir 5.1 teoremas iš [18], gauname, kad matas $P_{N,w,n}$, kai $N \to \infty$, silpnai konverguoja į $m_H u_n^{-1}$. Lema įrodyta.

Toliau, norint įrodyti 1 teoremą, nuo funkcijos $\zeta_n(s, \alpha; \mathbf{a})$ reikia pereiti prie funkcijos $\zeta(s, \alpha; \mathbf{a})$. Tam panaudosime aproksimavimą vidurkiu.

4 lema. *Sakykime, kad α, h ir w(l) yra tokie patys kaip ir 1 teoremoje, o* $\sigma > \frac{1}{2}$. *Tada*

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{U} \sum_{l=0}^{N} w(l) \left|\zeta(\sigma + ilh, \alpha; \mathbf{a}) - \zeta_n(\sigma + ilh, \alpha; \mathbf{a})\right| = 0.$$

Įrodymas. Periodinei Hurvico dzeta funkcijai yra teisingas įvertis (žr. [1])

$$\int_0^T \left|\zeta(\sigma + it, \alpha; \mathbf{a})\right|^2 dt = O(T).$$

Taip pat tokiems pat σ turime, kad

$$\int_0^T \left|\zeta'(\sigma + it, \alpha; \mathbf{a})\right|^2 dt = O(T). \tag{7}$$

Sakykime, kad $\sigma_1 > \frac{1}{2}$ yra toks pat fiksuotas skaičius kaip ir anksčiau. Pažymėkime

$$l_n(s, \alpha) = \frac{s}{\sigma_1} \Gamma\left(\frac{s}{\sigma_1}\right)(n + \alpha)^s;$$

čia $\Gamma(s)$ yra Oilerio gama funkcija. Pritaikę Melino transformacijos formulę (5.4.1 teorema iš [19]), funkciją $\zeta_n(s, \alpha; \mathbf{a})$ galime užrašyti taip

$$\zeta_n(s, \alpha; \mathbf{a}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} \zeta(s + z, \alpha; \mathbf{a}) l_n(z, \alpha) \frac{dz}{z}.$$

Tarkime, kad $\frac{1}{2} < \sigma_2 < 1$ ir $\sigma_2 < \sigma$. Pritaikę gerai žinomą reziduumų teoremą (žr. [20]) ir pastumdami integravimo tiesę į kairę, gauname

$$\zeta_n(s, \alpha; \mathbf{a}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_2 - \sigma - i\infty}^{\sigma_2 - \sigma + i\infty} \zeta(s + z, \alpha; \mathbf{a}) l_n(z, \alpha) \frac{dz}{z} + R_n(s, \alpha; \mathbf{a});$$

čia

$$R_n(s, \alpha; \mathbf{a}) = \operatorname{Res}_{z=1-s} \zeta(s + z, \alpha; \mathbf{a}) l_n(z, a) z^{-1} \quad (\text{jei } A = 0, \text{tai ir } R_n(s, \alpha; \mathbf{a}) = 0).$$

Remdamiesi Koši integraline formule (3.12 teorema iš [20]) ir atsižvelgę į (4) įvertį, gauname

$$\begin{aligned} &\frac{1}{U} \sum_{l=0}^{N} w(l) \left|\zeta(\sigma + it, \alpha; \mathbf{a}) - \zeta_n(\sigma + it, \alpha; \mathbf{a})\right| \\ &\ll \frac{1}{U} \sum_{l=0}^{N} \left|R_n(\sigma + it + ilh, \alpha; \mathbf{a})\right| + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \left|l_n(\sigma_2 - \sigma + i\tau, \alpha)\right| \left(\frac{1}{U} \sum_{l=0}^{N} w(l) \left|\zeta(\sigma_2 + it + ilh + i\tau, \alpha; \mathbf{a})\right|\right) d\tau. \end{aligned} \tag{8}$$

[4] darbe buvo įrodyta, kad yra teisingi tokie įverčiai:

$$\sum_{l=0}^{N}\left|R_n\left(\sigma+it+ilh,\alpha;\mathbf{a}\right)\right|=o(N) \tag{9}$$

ir

$$\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N}\left|\zeta\left(\sigma_2+it+ilh+i\tau,\alpha;\mathbf{a}\right)\right|\ll 1+|\tau|. \tag{10}$$

Iš gautų (7), (10) ir (4) įverčių turime

$$\begin{aligned}&\frac{1}{U}\sum_{l=0}^{N}w(l)\left|\zeta\left(\sigma+ilh,\alpha;\mathbf{a}\right)-\zeta_n\left(\sigma+ilh,\alpha;\mathbf{a}\right)\right|\\&\ll\int_{-\infty}^{\infty}\left|l_{\mathrm{n}}\left(\sigma_2-\sigma+i\tau,\alpha\right)\right|\left(1+|\tau|\right)d\tau+o(1).\end{aligned} \tag{11}$$

Be to, kadangi $\sigma_2-\sigma<0$, iš $l_n(s,\alpha)$ apibrėžimo turime, kad

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|l_n\left(\sigma_2-\sigma+i\tau,\alpha\right)\right|\left(1+|\tau|\right)d\tau=0.$$

Iš čia kartu su (11) įverčiu gauname lemos tvirtinimą.

4. 1 teoremos įrodymas

Dabar esame pasiruošę įrodyti pagrindinę darbo teoremą – 1 teoremą. Priminsime, kad 3 lemoje įrodėme, jog erdvėje ($\mathbf{C}$, $B(\mathbf{C})$) tikimybinis matas $P_{N,w,n}(A)$ silpnai konverguoja į tam tikrą tikimybinį matą P_n.

Tegul $X_n(\sigma)$ yra kompleksines reikšmes įgyjantis atsitiktinis elementas erdvėje ($\mathbf{C}$, $B(\mathbf{C})$), o jo skirstinys yra P_n. Be to, sakykime, kad Θ_N yra atsitiktinis kintamasis, apibrėžtas tam tikroje tikimybinėje erdvėje $\left(\hat{\Omega},B\left(\hat{\Omega}\right),\mathrm{P}\right)$, o jo skirstinys yra

$$\mathrm{P}\left(\Theta_{\mathrm{N}}=lh\right)=\frac{w(l)}{N},\qquad l=0,1,\ldots,N.$$

Apibrėžkime kompleksines reikšmes įgyjantį atsitiktinį elementą $X_{N,n}(\sigma)$

$$X_{N,n}(\sigma)=\zeta_n(\sigma+i\Theta_N,\alpha;\mathbf{a}).$$

Iš 3 lemos turime, kad, kai $N\to\infty$, $X_{N,n}(\sigma)$ konverguoja pagal skirstinį į $X_n(\sigma)$, t. y.

$$X_{N,n}(\sigma)\xrightarrow{D}X_n(\sigma). \tag{12}$$

Dabar įrodysime, kad tikimybinių matų šeima $\{P_n,\ n\in\mathbf{N}\cup\{0\}\}$ yra suspausta; čia P_n yra 3 lemoje esantis matas.

Kompleksinėje plokštumoje $\mathbf{C}$ metrika yra apibrėžiama formule

$$\rho\left(z_1,z_2\right)=\left|z_1-z_2\right|=\sqrt{\left(x_1-x_2\right)^2+\left(y_1-y_2\right)^2}\;;$$

čia $z_j=x_j+iy_j\in\mathbf{C}$, $j=1,2$ (žr. [19]).

Sakykime, kad $M>0$ yra bet koks skaičius. Remdamiesi Čebyšovo nelygybe (žr. [20]) gauname, kad

$$P_{N,w,n}\left(\{z\in C:|z|>M\}\right)=\mu_{N,w}\left(\left|\zeta_n(\sigma+ilh,\alpha;\mathbf{a})\right|>M\right)$$
$$\ll\frac{1}{MU}\sum_{l=0}^{N}w(l)\left|\zeta_n(\sigma+ilh,\alpha;\mathbf{a})\right| . \tag{13}$$

Analogiškai, kaip ir 4 lemos atveju, galime gauti

$$\frac{1}{U}\sum_{l=0}^{N}w(l)\left|\zeta_n(\sigma+ilh,\alpha;\mathbf{a})\right|=O(1). \tag{14}$$

Be to, pasinaudoję anksčiau minėta lema ir (4) įverčiu, gauname

$$\sup_{n\in\mathbf{N}\cup\{0\}}\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{U}\sum_{l=0}^{N}w(l)\left|\zeta_n(\sigma+it,\alpha;\mathbf{a})\right|\le R<\infty . \tag{15}$$

Atsižvelgę į (13)–(15) sąryšius bei 5.1 teoremą iš [18], gauname

$$P_n\left(\{s\in C:|s|>M_\varepsilon\}\right)\le\limsup_{N\to\infty}P_{N,w,n}\left(\{s\in C:|s|>M_\varepsilon\}\right)\le\varepsilon ; \tag{16}$$

čia M_ε imame tokį, kad $M_\varepsilon=M=\frac{R}{\varepsilon}$, o $\varepsilon>0$ yra bet koks skaičius.

Apibrėžkime funkciją $u:\mathbf{C}\to\mathbf{R}$ formule $u(z)=|z|$. Ji yra tolydi, todėl iš (12) ir 5.1 teoremos iš [18] gauname

$$\left|X_{N,n}(\sigma)\right|\to\left|X_n(\sigma)\right|.$$

Iš pastarojo sąryšio bei atsižvelgę į (16) nelygybę turime

$$\mathrm{P}\left(\left|\mathrm{X}_{\mathrm{n}}(\sigma)\right|>M_\varepsilon\right)\le\varepsilon . \tag{17}$$

Sudarykime aibę $K_\varepsilon=\{s\in C:|s|\le M_\varepsilon\}$. Ji yra tolygiai aprėžta. Todėl K_ε yra kompaktas. Iš (16) įverčio gauname

$$P_n(K_\varepsilon)\ge 1-\varepsilon$$

visiems $n\in\mathbf{N}\cup\{0\}$. Tai parodo, kad šeima $\{P_n\}$ yra suspausta. Pagal Prochorovo teoremą, ji yra reliatyviai kompaktiška. Vadinasi, egzistuoja posekis $\{P_{n_1}\}\subset\{P_n\}$, toks, kad, kai $n_1\to\infty$, P_{n_1} silpnai konverguoja į tam tikrą tikimybinį matą P erdvėje $(\mathbf{C}, B(\mathbf{C}))$, t. y., kai $n_1\to\infty$,

$$X_{n_1}\xrightarrow{D}P. \tag{18}$$

Remdamiesi 4 lema, kiekvienam $\varepsilon>0$ turime

$$\lim_{n\to\infty}\limsup_{N\to\infty}\mu_{N,w}\left(\left|\zeta(\sigma+ilh,\alpha;\mathbf{a})\right|\ge\varepsilon\right)\le$$
$$\le\lim_{n\to\infty}\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{U\varepsilon}\sum_{l=0}^{N}w(l)\left|\zeta(\sigma+ilh,\alpha;\mathbf{a})-\zeta_n(\sigma+ilh,\alpha;\mathbf{a})\right|=0 .$$

Todėl, paėmę $X_N(\sigma)=\zeta(\sigma+i\theta_N,\alpha;\mathbf{a})$ bei atsižvelgę į (17), gauname

$$\lim_{n\to\infty}\limsup_{N\to\infty}\mathrm{P}\left(\left|X_{N,n}(\sigma)-X_N(\sigma)\right|\ge\varepsilon\right)=0.$$

Pastaroji lygybė, (18) sąryšis kartu su 4.2 teorema iš [18] parodo, kad, kai $N \to \infty$,

$$X_N \xrightarrow{D} P.$$

Tai reiškia, kad matas $P_{N,w}$ silpnai konverguoja į matą P, kai $N \to \infty$. Teorema įrodyta.

Literatūra

1. Javtokas A., Laurinčikas A., 2006, On the periodic Hurwitz zeta-function. Hardy-Ramanujan J. Vol. 29. P. 18–39.
2. Laurinčikas A., Garunkštis R., 2002, The Lerch Zeta-Function. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht, Boston, London.
3. Javtokas A., Laurinčikas A., 2008, A joint universality theorem for periodic Hurwitz zeta-functions. Bul. Austral. Math. Soc. Vol. 78. P. 13–33.
4. Laurinčikas A., Macaitienė R., 2009, The discrete universality of the periodic Hurwitz zeta function. Integral Transf. Spec. Funct. Vol. 20. No. 9. P. 673–686.
5. Stancevičiūtė L., 2009, Periodinės Hurvico dzeta funkcijos universalumas. *Magistro darbas*. Šiaulių universitetas.
6. Laurinčikas A., 1992, Weighted limit theorem for the Riemann zeta-function. Lith. Math. J. Vol. 32. No. 3. P. 291–296.
7. Laurinčikas A., Misevičius G., 1994, Weighted limit theorem for the Riemann zeta function in the space of analytic functions. Lith. Math. J. Vol. 34. No. 2. P. 171–182.
8. Laurinčikas A., Misevičius G., 1996, On limit distribution of the Riemann zeta-function. Acta Arith. Vol. 76. No. 4. P. 317–334.
9. Garunkštis R., Laurinčikas A., 1997, Limit theorem with weight for the Lerch zeta function in the space of analytic functions. Proc. Steklov Inst. Math.. Vol. 218. P. 104–116.
10. Genys J., Laurinčikas A., 2007, Weighted limit theorems for general Dirichlet series. Unif. Distrib. Theory. Vol. 2, No. 2. P. 49–66.
11. Genys J., Laurinčikas A., 2009, Weighted limit theorems for general Dirichlet series. II. Unif. Distrib. Theory. Vol. 4, No. 1. P. 9–26.
12. Genys J., Laurinčikas A., 2011, Joint weighted limit theorems for general Dirichlet series. Math. Model. Anal. Vol. 16. No. 1. P. 39–51.
13. Genys J., Macaitienė R., Šiaučiūnas D., 2008, Weighted joint limit theorems for general Dirichlet series. Šiauliai Math. Semin. Vol. 3 (11). P. 85–95.
14. Lukašonok O., 2012, A weighted limit theorem for periodic Hurwitz zeta-function. Liet. Mat. Rink. Vol. 53. P. 60–65.
15. Kačinskaitė R., 2003, A discrete limit theorem with weight for the Matsumoto zeta-function on the complex plane. Fiz. Mat. Fak. Moksl. Semin. Darb. Vol. 6. P. 42–51.
16. Kačinskaitė R., 2004, A weighted discrete limit theorem on the complex plane for the Matsumoto zeta-function. Liet. Mat. Rink. Vol. 44. Spec. Iss. P. 63–68.
17. Heyer H., 1977, Probability Measure on Locally Compact Groups. Springer-Verlag: Berlin, Heidelberg, New York.
18. Billingsley P., 1968, Convergence of Probability Measures. John Wiley and Sons: New York.
19. Laurinčikas A., 1996, Limit Theorems for the Riemann Zeta-Function. Kluwer Academic Publishers: Dordrech, Boston, London.
20. Nagelė A., Papreckienė L., 1996, Kompleksinio kintamojo funkcijų teorija. Vilnius: Žara.

Summary

DISCRETE VALUE DISTRIBUTION WITH WEIGHT FOR THE PERIODIC HURWITZ ZETA-FUNCTION

I. Žalytė, R. Kačinskaitė

In the paper, we prove the discrete limit theorem with weight for the periodic Hurwitz zeta-function $\zeta(s, \alpha; \mathbf{a})$ with a transcendental parameter α, $0 < \alpha \leq 1$, in the complex plane when the weight function $w(l)$ is used.

Let $w(l)$ be a function of bounded variation on the interval $[0, \infty)$ such that $U = U(N, w) = \sum_{l=0}^{N} w(l) \to \infty$, $N \to \infty$. Suppose that $h > 0$ is a fixed number such that $\exp\left(\frac{2\pi}{h}\right)$ is rational number. Then, for $\sigma > \frac{1}{2}$, on $(\mathbf{C}, B(\mathbf{C}))$, there exists a probability measure P such that the measure $\frac{1}{U} \sum_{\substack{l=0 \\ \zeta(\sigma+ilh,\alpha;\mathbf{a})\in A}}^{N} w(l)$, $A \in B(\mathbf{C})$, converges weakly to P as $N \to \infty$.

Keywords: complex plane, periodic Hurwitz zeta-function, value distribution, weight function.

Santrauka

PERIODINĖS HURVICO DZETA FUNKCIJOS REIKŠMIŲ PASISKIRSTYMAS SU SVORIU

I. Žalytė, R. Kačinskaitė

Straipsnyje įrodyta diskrečioji ribinė teorema su svoriu periodinei Hurvico dzeta funkcijai $\zeta(s, \alpha; \mathbf{a})$ su transcendenčiuoju parametru α, $0 < \alpha \leq 1$, kompleksinėje plokštumoje, kai papildomai yra naudojama svorio funkcija $w(l)$.

Tegul $w(l)$ yra realioji baigtinės variacijos funkcija intervale $[0, \infty)$ tokia, kad $U = U(N, w) = \sum_{l=0}^{N} w(l) \to \infty$, $N \to \infty$. Sakykime, kad aritmetinės progresijos žingsnis $h > 0$ yra toks, kad $\exp\left(\frac{2\pi}{h}\right)$ yra racionalus skaičius. Tada, kai $\sigma > \frac{1}{2}$, tikimybinis matas $\frac{1}{U} \sum_{\substack{l=0 \\ \zeta(\sigma+ilh,\alpha;\mathbf{a})\in A}}^{N} w(l)$, $A \in B(\mathbf{C})$, kai $N \to \infty$, silpnai konverguoja į tam tikrą erdvėje $(\mathbf{C}, B(\mathbf{C}))$ egzistuojantį tikimybinį matą P.

Prasminiai žodžiai: kompleksinė plokštuma, periodinė Hurvico dzeta funkcija, reikšmių pasiskirstymas, svorio funkcija.

Įteikta 2015-07-31
Priimta 2015-10-04

TAIKOMIEJI MOKSLAI

APPLIED SCIENCES