Vilniaus universiteto leidykla

Contents lists available at Vilnius University Press

Jaunųjų mokslininkų darbai
2022, vol. 52 (1), pp. 47–56

eISSN 1648-8776
DOI: https://doi.org/10.15388/JMD.2022.12

Elipsinių kreivių L funkcijų diskrečiojo universalumo tyrimas

The Investigation of the Discrete Universality of L-Functions of Elliptic Curves

Samanta Zakaitė
samanta.zakait@gmail.com

Antanas Garbaliauskas
Šiaulių valstybinė kolegija
a.garbaliauskas@svako.lt

Santrauka. Darbe įrodyta elipsinių kreivių L funkcijų diskrečiojo universalumo teorema silpnojo tikimybinių matų konvergavimo prasme analizinių funkcijų erdvėje. Nagrinėjamas analizinės funkcijos aproksimavimas postūmiais $L_E(s+imh)$, čia m įgyja reikšmes iš diskrečiosios aibės, pavyzdžiui, aritmetinės progresijos. Fiksuotas skaičius $h>0$ pasirenkamas taip, kad $\exp\{2\pi k/h\}$ būtų racionalusis skaičius su *tam tikrais* $k \in \mathbf{Z}\setminus\{0\}$. Elipsinių kreivių L funkcijų diskrečiojo universalumo įrodymas remiasi šios funkcijos diskrečiąja ribine teorema tikimybinių matų silpnojo konvergavimo prasme analizinių funkcijų erdvėje.

Reikšminiai žodžiai: elipsinių kreivių L funkcija, ribinė teorema, diskretusis universalumas.

Summary. In the paper, we prove the discrete universality theorem in the sense of the weak convergence of probability measures in the space of analytic functions for the L-functions of elliptic curves. We consider an approximation of analytic functions by translations $L_E(s+imh)$, where $h>0$ is a fixed number, m takes values from some discrete set such as arithmetical progression. We suppose that the number $h>0$ is chosen so that $\exp\{2\pi k/h\}$ is a rational number for some $k \in \mathbf{Z}\setminus\{0\}$. The proof of discrete universality of L-functions of elliptic curves is based on a limit theorem in the sense of weak convergence of probability measures in the space of analytic functions.

Keywords: L-function of elliptic curves, limit theorem, discrete universality.

Received: 2022-05-02. **Accepted:** 2022-05-23

Įvadas

Tegul E elipsinė kreivė virš racionaliųjų skaičių kūno duota Vejerštraso (Weierstrass) lygtimi

$$y^2 = x^3 + ax + b, \quad a, b \in \mathbf{Z}.$$

Pažymėkime $\Delta = -16(4a^3 + 27b^2) \neq 0$ kreivės E diskriminantą. Tada kubinio trinario $x^3 + ax + b$ šaknys yra skirtingos ir kreivė E yra nesinguliarioji.

Kiekvienam pirminiam p pažymėkime $\nu(p)$ lyginio

$$y^2 \equiv x^3 + ax + b (\mathrm{mod}\ p)$$

sprendinių skaičių. Tegu $\lambda(p) = p - \nu(p)$, o $s = \sigma + it -$ kompleksinis kintamasis. Tuomet elipsinės kreivės L funkcija apibrėžiama Oilerio (Euler) sandauga

$$L_E(s) = \prod_{p|\Delta} \left(1 - \frac{\lambda(p)}{p^s}\right)^{-1} \prod_{p \nmid \Delta} \left(1 - \frac{\lambda(p)}{p^s} + \frac{1}{p^{2s-1}}\right)^{-1}.$$

Remiantis Hasės (Hasse) įverčiu

$$|\lambda(p)| < 2\sqrt{p},$$

begalinė sandauga, apibrėžianti funkciją $L_E(s)$, konverguoja absoliučiai ir tolygiai pusplokštumės $D_a = \left\{ s \in \mathbf{C} : \sigma > \frac{3}{2} \right\}$ kompaktiniuose poaibiuose ir apibrėžia analizinę nelygią nuliui funkciją. Šioje srityje funkcija $L_E(s)$ gali būti išreikšta Dirichlė (Dirichlet) eilute

$$L_E(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda(m)}{m^s},$$

čia $\lambda(m)$ yra multiplikatyvioji funkcija, o ši eilutė taip pat absoliučiai konverguoja srityje D_a.

Funkcijos $L_E(s)$ analizinis pratęsimas glaudžiai susijęs su tam tikrų modulinių formų L funkcijomis. Funkcijos $L_E(s)$ analizinės savybės sutampa su svorio 2 naujųjų formų L funkcijų savybėmis.

1 savybė. Funkcija $L_E(s)$ analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą ir tenkina funkcinę lygtį

$$\left(\frac{\sqrt{q}}{2\pi}\right)^s \Gamma(s) L_E(s) = \eta \left(\frac{\sqrt{q}}{2\pi}\right)^{2-s} \Gamma(2-s) L_E(2-s),$$

čia q – natūralusis skaičius, sudarytas iš diskriminanto Δ pirminių daugiklių, $\eta = \pm 1$, o $\Gamma(s)$ yra Oilerio gama funkcija.

2 savybė. Furjė eilutė

$$F(z)=\sum_{m=1}^{\infty}\lambda(m)e^{2\pi imz}$$

yra svorio 2 naujoji forma kurio nors Hekės pogrupio $\Gamma_0(q)$ atžvilgiu.

Šias savybes 2001 metais įrodė C. Brioilis (Breuil), B. Konradas (Conrad), F. Daimondas (Diamond) ir R. Teiloras (Taylor) [2].

Elipsinių kreivių L funkcija, kaip ir dauguma klasikinių dzeta ir L funkcijų, yra universali Voronino prasme. Liniko-Ibragimovo hipotezė sako, kad visos funkcijos tam tikroje pusplokštumėje apibrėžtos Dirichlė eilute, analiziškai pratęsiamos į kairę nuo absoliutaus konvergavimo pusplokštumės ir tenkinančios tam tikras didėjimo sąlygas, yra universalios Voronino prasme.

Rymano ir L funkcijų universalumas plačiai taikomas kvantinėje mechanikoje, kondensuotų medžiagų fizikoje bei statistinėje fizikoje [6].

Pažymėkime meas A mačiosios aibės $A\subset\mathbf{R}$ Lebego matą. Kai $T>0$, tegul

$$\nu_T(...)=\frac{1}{T}\operatorname{meas}\{\tau\in[0,T]:...\},$$

čia vietoj daugtaškio įrašomos sąlygos, kurias tenkina τ. Tegul $\mathbf{C}$ žymi kompleksinę plokštumą, o sritis $D=\left\{s\in\mathbf{C}:1<\sigma<\frac{3}{2}\right\}$. Tolydaus tipo universalumo teoremą elipsinių kreivių L funkcijai įrodė A. Laurinčikas ir V. Garbaliauskienė.

A teorema [4]. *Tarkime, kad E yra nesinguliarioji elipsinė kreivė virš racionaliųjų skaičių kūno. Tegul K yra juostos D kompaktinis poaibis su jungiuoju papildiniu, o* $f(s)$ *yra tolydi nelygi nuliui funkcija poaibyje K ir analizinė K viduje. Tuomet su kiekvienu ε >0*

$$\liminf_{T\to\infty}\nu_T\left(\sup_{s\in K}\left|L_E(s+i\tau)-f(s)\right|<\varepsilon\right)>0.$$

Pastaroji teorema rodo, kad egzistuoja be galo daug postūmių $L_E(s+i\tau)$, kurie norimu tikslumu ε aproksimuoja duotąją analizinę funkciją $f(s)$. Be to aibė tokių τ turi teigiamą apatinį tankį. Tolydaus tipo universalumo teoremose τ kinta tolydžiai intervale [0, T].

Be šio tipo teoremų egzistuoja universalumo teoremų diskretusis atvejis. Rymano dzeta funkcijos diskretųjį universalumą nagrinėjo S. M. Voroninas (Voronin) (1979) [9] ir B. Bagči (Bagchi) (1981) [1] . Šio universalumo atveju postūmio menamoji dalis įgyja reikšmes iš tam tikros diskrečiosios aibės, pavyzdžiui, iš aritmetinės progresijos. Tegu $N\in\mathbf{N}$ ir

$$\mu_N(...)=\frac{1}{N+1}\#\{0\le m\le N:...\},$$

čia vietoj daugtaškių įrašomos sąlygos, kurias tenkina *m*, o $h > 0$ yra fiksuotas skaičius.

Elipsinių kreivių *L* funkcijų diskretųjį universalumą įrodė V. Garbaliauskienė ir A. Laurinčikas.

B teorema ([3]). *Tarkime, kad* $\exp\left\{\frac{2\pi k}{h}\right\}$ *yra iracionalusis skaičius su visais* $k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$. *Tegul K yra juostos D kompaktinis poaibis su jungiuoju papildiniu, o* $f(s)$ *yra tolydi nelygi nuliui funkcija poaibyje K ir analizinė K viduje. Tuomet su kiekvienu ε >0*

$$\liminf_{N\to\infty} \mu_N\left(\sup_{s\in K} \left| L_E(s+imh) - f(s) \right| < \varepsilon \right) > 0.$$

Šioje teoremoje matome, jog postūmių $L_E(s+imh)$, aproksimuojančių duotąją analizinę funkciją, aibė yra pakankamai gausi: ji turi teigiamą apatinį tankį.

Atvejis, kai $\exp\left\{\frac{2\pi k}{h}\right\}$ yra racionalusis skaičius, su kuriais nors $k \neq 0$ yra sudėtingesnis. Sudėtingumo problemos kyla iš ribinės teoremos analizinių funkcijų erdvėje funkcijai $L_E(s)$.

Šio straipsnio tikslas – įrodyti elipsinių kreivių *L* funkcijų diskretųjį universalumą, pasirenkant $h > 0$ tokį, kad $\exp\left\{\frac{2\pi k}{h}\right\}$ būtų racionalusis skaičius tam tikriems $k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$.

1 teorema. *Tarkime, kad egzistuoja sveikasis skaičius* $k \neq 0$, toks, kad $\exp\left\{\frac{2\pi k}{h}\right\}$ *yra racionalusis skaičius. Tegu K yra juostos D kompaktinis poaibis su jungiuoju papildiniu, o* $f(s)$ *yra tolydi nelygi nuliui funkcija poaibyje K ir analizinė K viduje. Tuomet su kiekvienu ε >0*

$$\liminf_{N\to\infty} \mu_N\left(\sup_{s\in K} \left| L_E(s+imh) - f(s) \right| < \varepsilon \right) > 0.$$

Teoremos įrodymas remiasi diskrečiosiomis ribinėmis teoremomis tikimybinio mato silpnojo konvergavimo prasme.

Diskrečioji ribinė teorema funkcijai $L_E(s)$

Pirmiausiai apibrėšime atsitiktinį elementą analizinių funkcijų erdvėje. Kadangi $\exp\left\{\frac{2\pi k}{h}\right\}$ yra racionalusis skaičius su tam tikrais sveikaisiais $k \neq 0$, todėl pakanka pasirinkti tik teigiamuosius skaičius *k*, tenkinančius šią savybę. Tegul k_0 yra mažiausias iš jų. Tada kiti skaičiai k yra skaičiaus k_0 kartotiniai [7]. Tarkime, kad

$$\exp\left\{\frac{2\pi k_0}{h}\right\} = \frac{m_0}{n_0}, \quad m_0, n_0 \in \mathbf{N}, \ (m_0, n_0) = 1.$$

Tegul $\gamma = \{s \in \mathbf{C} : |s| = 1\}$ yra vienetinis apskritimas kompleksinėje plokštumoje $\mathbf{C}$. Apibrėžkime begaliniamatį torą

$$\Omega = \prod_p \gamma_p,$$

čia $\gamma_p = \gamma$ su kiekvienu pirminiu *p*. Su sandaugos topologija ir pataškine daugyba Ω yra kompaktinė tolopoginė Abelio (Abelian) grupė. Pažymėkime $\omega(p)$ elemento $\omega \in \Omega$ projekciją koordinatinėje erdvėje γ_p su visais $m \in \mathbf{N},$ tegul

$$\omega(m) = \prod_{p^\alpha \| m} \omega^\alpha(p),$$

čia $p^\alpha \| m$ reiškia, kad $p^\alpha | m$, bet $p^{\alpha+1} \nmid m$. Dėl to, $\omega(m)$ yra visiškai multiplikatyvi funkcija ir $|\omega(m)| = 1.$

Pažymėkime $\mathcal{B}(S)$ – metrinės erdvės *S* Borelio (Borel) aibių klasę, o *H*(*D*) – analizinių srityje *D* funkcijų erdvę su tolygaus konvergavimo kompaktuose topologija. Apibrėžkime

$$\Omega_h = \{\omega \in \Omega : \ \omega(m_0) = \omega(n_0)\}.$$

Tuomet Ω_h yra toro Ω uždarasis pogrupis, todėl jis taip pat yra kompaktinė topologinė Abelio grupė. Tokiu būdu erdvėje $(\Omega_h, \mathcal{B}(\Omega_h))$ galime apibrėžti tikimybinį Haro (Haar) matą m_{hH}. Taip gauname tikimybinę erdvę $(\Omega_h, \mathcal{B}(\Omega_h), m_{hH})$.

Tegul $D_0 = \{s \in \mathbf{C} : \sigma > 1\}$ kompleksinės plokštumos sritis, o su visais $s \in D_0$ ir $\omega_h \in \Omega_h$,

$$L_E(s, \omega_h) = \prod_{p \nmid \Delta} \left(1 - \frac{\lambda(p)\omega_h(p)}{p^s} + \frac{\omega_h^2(p)}{p^{2s-1}}\right)^{-1} \prod_{p | \Delta} \left(1 - \frac{\lambda(p)\omega_h(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

2 teorema. $L_E(s, \omega_h)$ *yra* $H(D_0)-$*reikšmis atsitiktinis elementas, apibrėžtas tikimybinėje erdvėje* $(\Omega_h, \mathcal{B}(\Omega_h), m_{hH})$.

Įrodymas. Erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ apibrėžtas tikimybinis Haro matas m_H. Tegul $p_{r_1}, ..., p_{r_k}$ yra pasirenkama baigtinė pirminių skaičių aibė, $A_{r_1}, ..., A_{r_k} \in \mathcal{B}(\gamma)$.

Pasinaudosime [7] darbe sukonstruota mačiąja funkcija $g:\Omega\to\Omega_h$. Pažymėkime g_p funkcijos g siaurinį koordinatinėje erdvėje γ_p. Kadangi $\{\omega(p)\}$ yra nepriklausomų atsitiktinių elementų, apibrėžtų tikimybinėje erdvėje $(\Omega,\mathcal{B}(\Omega),m_H)$, seka ir $m_{hH}=m_H g^{-1}$, gauname

$$m_{hH}\left(\omega_h\in\Omega_h:\omega_h\left(p_{r_1}\right)\in A_{r_1},\dots,\ \omega_h\left(p_{r_k}\right)\in A_{r_k}\right)$$
$$=m_H g^{-1}\left(\omega_h\in\Omega_h:\omega_h\left(p_{r_1}\right)\in A_{r_1},\dots,\ \omega_h\left(p_{r_k}\right)\in A_{r_k}\right)$$
$$=m_H\left(\omega\in\Omega:\omega\left(p_{r_1}\right)\in g^{-1}_{p_{r_1}}A_{r_1},\dots,\ \omega\left(p_{r_k}\right)\in g^{-1}_{p_{r_k}}A_{r_k}\right)$$
$$=m_H\left(\omega\in\Omega:\omega\left(p_{r_1}\right)\in g^{-1}_{p_{r_1}}A_{r_1}\right)\cdot\ldots\cdot m_H\left(\omega\in\Omega:\omega\left(p_{r_k}\right)\in g^{-1}_{p_{r_k}}A_{r_k}\right)$$
$$=m_{hH}\left(\omega_h\in\Omega_h:\omega_h\left(p_{r_1}\right)\in A_{r_1}\right)\cdot\ldots\cdot m_{hH}\left(\omega_h\in\Omega_h:\omega_h\left(p_{r_k}\right)\in A_{r_k}\right).$$

Vadinasi, $\{\omega(p)\}$ yra nepriklausomų atsitiktinių elementų, apibrėžtų tikimybinėje erdvėje $(\Omega_h,\mathcal{B}(\Omega_h),m_{hH})$, seka.

Teoremai įrodyti pakanka parodyti, kad sandauga

$$\prod_{p\nmid\Delta}\left(1-\frac{\lambda(p)\omega_h(p)}{p^s}+\frac{\omega_h^2(p)}{p^{2s-1}}\right)^{-1}$$

beveik tikrai tolygiai konverguoja srities D_0 kompaktiniuose poaibiuose. Tam pakanka įrodyti, kad srities D_0 kompaktiniuose poaibiuose beveik tikrai konverguoja eilutė

$$\sum_{p|\Delta}x_p\left(s,\omega_h\right), \tag{1}$$

čia

$$x_p\left(s,\omega_h\right)=\frac{\lambda(p)\omega_h(p)}{p^s}.$$

Atsitiktinio elemento ξ vidurkį pažymėkime $\mathbb{E}\xi$. Aišku, kad

$$\mathbb{E}\omega_h(p)=\int_{\Omega_h}\omega_h(p)\,\mathrm{d}m_{hH}=0,$$

todėl $\mathbb{E}x_p\left(\mathrm{s},\omega_h\right)=0$ su kiekvienu pirminiu p. Be to,

$$\mathbb{E}\left|x_p\left(\mathrm{s},\omega_h\right)\right|^2=\frac{\lambda^2(p)}{p^{2\sigma}}\int_{\Omega_h}\omega_h(p)\overline{\omega_h(p)}\,\mathrm{d}m_{hH}=\frac{\lambda^2(p)}{p^{2\sigma}}.$$

Remiantis Hasės įverčiu gauname, kad

$$\sum_{p\nmid\Delta}\mathbb{E}\left|x_p\left(\mathrm{s},\omega_h\right)\right|^2<\infty$$

su visais $s \in D_0$. Kadangi $\{x_p(\mathrm{s}, \omega_h)\}$ yra nepriklausomų atsitiktinių dydžių seka ir eilutės

$$\sum_{p \nmid \Delta} \mathrm{E} x_p(\mathrm{s}, \omega_h) \text{ ir } \sum_{p \nmid \Delta} \mathrm{E}\left| x_p(\mathrm{s}, \omega_h) - \mathrm{E} x_p(\mathrm{s}, \omega_h) \right|^2$$

konverguoja, pagal jau žinomą 1.2.11 teoremą iš [8], gauname, kad eilutė (1) konverguoja beveik tikrai kiekvienam fiksuotam $s \in D_0$. Tačiau (1) yra Dirichlė eilutė, kuri tolygiai konverguoja srities D_0 kompaktiniuose poaibiuose su beveik visais $\omega_h \in \Omega_h$ mato m_{hH} atžvilgiu. Teorema įrodyta.

Suformuluosime ribinę teoremą elipsinių kreivių L funkcijai $L_E(s)$ analizinių funkcijų erdvėje.

3 teorema. *Tarkime, kad egzistuoja sveikasis skaičius* $k \neq 0$ ir fiksuotas $h > 0$, tokie, kad $\exp\left\{\frac{2\pi k}{h}\right\}$ *būtų racionalusis skaičius. Tada tikimybinis matas*

$$P_N(A) \overset{def}{=} \mu_N(L_E(s + imh) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(H(D_0)),$$

silpnai konverguoja į atsitiktinio elemento $L_E(s, \omega_h)$ *skirstinį, kai* $N \to \infty$.

Universalumo teoremos įrodymas remiasi diskrečiąja ribine teorema analizinių funkcijų erdvėje. Pastarajai teoremai įrodyti naudojamos ribinės teoremos Dirichlė polinomams bei ribinės teoremos absoliučiai konverguojančioms Dirichlė eilutėms [5].

Atsitiktinio elemento $L_E(s, \omega_h)$ atrama

Tegul $V > 0$ yra laisvai pasirenkamas skaičius, toks, kad $D_V = \left\{ s \in \mathbf{C} : 1 < \sigma < \frac{3}{2}, \ |t| < V \right\}$. Aišku, kad $D_V \subset D_0$, todėl $L_E(s, \omega_h)$ taip pat yra $H(D_V)$-reikšmis atsitiktinis elementas, apibrėžtas tikimybinėje erdvėje $(\Omega_h, \mathcal{B}(\Omega_h), m_{hH})$. Pažymėkime jo skirstinį $P_{L_E, V}$.

Norint įrodyti universalumo teoremą, mums reikės $H(D_V)$-reikšmio atsitiktinio elemento skirstinio $P_{L_E, V}$ atramos juostoje D_V. Priminsime, kad mato Q atrama yra vadinama tokia minimali uždara aibė S_Q, kad $Q(S_Q) = 1$. Aibė S_Q yra sudaryta iš tokių elementų $x \in S$, kurių bet kuriai atvirai aplinkai G yra teisinga nelygybė $Q(G) > 0$.

Tegul $a_p \in \gamma$, $s \in D_V$ ir

$$f_p(s,a_p)=\begin{cases}-\log\left(1-\dfrac{\lambda(p)a_p}{p^s}+\dfrac{a_p^2}{p^{2s-1}}\right), & \text{kai } p\nmid\Delta,\\ -\log\left(1-\dfrac{\lambda(p)a_p}{p^s}\right), & \text{kai } p\mid\Delta.\end{cases} \tag{2}$$

4 lema [3]. *Visų konverguojančių eilučių*

$$\sum_p f_p(s,a_p)$$

aibė erdvėje $H(D_V)$ yra tirštoji aibė.

Dabar esame pasirengę apibrėžti $P_{L_E,V}$ atramą. Tegul

$$S_V=\{g\in H(D_V): g(s)\neq 0 \text{ arba } g(s)\equiv 0\}.$$

5 lema. $H(D_V)$*-reikšmio atsitiktinio elemento skirstinio* $P_{L_E,V}$ *atrama yra aibė* S_V.

Įrodymas. 2 teoremos įrodyme gauta, kad $\{\omega(p)\}$ yra nepriklausomų atsitiktinių dydžių, apibrėžtų tikimybinėje erdvėje $(\Omega_h,\mathcal{B}(\Omega_h),m_{hH})$, seka. Todėl, išlaikydami (2) žymėjimą, turime, kad $\{y_p(s)\}=\{f_p(s,\omega_h(p))\}$ yra erdvės $(\Omega_h,\mathcal{B}(\Omega_h),m_{hH})$ nepriklausomų $H(D_V)$-reikšmių atsitiktinių elementų seka. Atsitiktinio elemento $y_p(s)$ atrama yra aibė

$$\{g\in H(D_V): g(s)=f_p(s,a),\ a\in\gamma\}.$$

Vadinasi, remiantis 1.7.10 teorema iš [8], $H(D_V)$-reikšmio atsitiktinio elemento

$$\log L_E(s,\omega_h)=\sum_p y_p(s)$$

atrama yra visų konverguojančių eilučių

$$\sum_p f_p(s,a_p),\ a\in\gamma,$$

aibės uždarinys. Remiantis 4 lema, pastaroji aibė yra tiršta erdvėje $H(D_V)$. Pažymėkime $u: H(D_V)\to H(D_V)$ funkciją, apibrėžtą formule $u(g)=e^g$, $g\in H(D_V)$. Ši funkcija $\log(L_E(s,\omega_h))$ priskirianti $L_E(s,\omega_h)$ ir $H(D_V)$ priskirianti $S_M\setminus\{0\}$ yra tolydi. Taigi, $L_E(s,\omega_h)$ atrama apima $S_M\setminus\{0\}$. Tačiau $L_E(s,\omega_h)$ atrama yra uždara aibė. Todėl, remiantis Hurvico (Hurwitz) teorema (žr. [8], 6.5.5 lema), $\overline{S_M\setminus\{0\}}=S_M$. Tokiu būdu $L_E(s,\omega_h)$ atrama apima S_M. Kita vertus,

$L_E(s, \omega_h)$ beveik tikrai konverguojanti nenulinių daugiklių sandauga, vadinasi, pagal tą pačią Hurvico teoremą, $L_E(s, \omega_h)$ atrama beveik tikrai priklauso S_M. Lema įrodyta.

1 teoremos įrodymas

Pasirenkame $V > 0$ tokį, kad $K \subset D_V$. Tarkime, kad $f(s)$ turi nenulinį analizinį pratęsimą į sritį D_V. Apibrėžkime atvirąją aibę *G* formule

$$G = \left\{ g \in H(D_V) : \sup_{s \in K} | g(s) - f(s) | < \varepsilon \right\}.$$

Iš 5 lemos seka, kad $G \subset S_V$, o iš 3 teoremos gauname, kad

$$\liminf_{N \to \infty} \mu_N \left(\sup_{s \in K} \left| L_E(s + imh) - f(s) \right| < \varepsilon \right)$$
$$\geq m_{hH}(\omega_h \in \Omega_h : L_E(s, \omega_h) \in G) > 0. \qquad (3)$$

Tegul $f(s)$ tenkina 1 teoremos sąlygas. Tada pagal Mergeliano teoremą [10] srities D_V kompaktiniame poaibyje *K* egzistuoja daugianaris $p_n(s)$, $p_n(s) \neq 0$, toks, kad

$$\sup_{s \in K} | f(s) - p_n(s) | < \frac{\varepsilon}{4}. \qquad (4)$$

Taip pat egzistuoja daugianaris $q_m(s)$ toks, kad

$$\sup_{s \in K} | p_n(s) - e^{q_m(s)} | < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Iš šios ir (4) nelygybių matome, kad

$$\sup_{s \in K} | f(s) - e^{q_m(s)} | < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (5)$$

Kadangi $e^{q_m(s)} \neq 0$, iš (3) randame, kad

$$\liminf_{N \to \infty} \mu_N \left(\sup_{s \in K} \left| L_E(s + imh) - e^{q_m(s)} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \right) > 0.$$

Iš šios ir (5) nelygybės gauname teoremos tvirtinimą.

Išvados

1. Elipsinių kreivių *L* funkcijai galioja diskrečioji ribinė teorema tikimybinių matų silpnojo konvergavimo prasme analizinių funkcijų erdvėje.
2. Funkcijai $L_E(s)$ galioja diskrečiojo universalumo nelygybė, kai $\exp\left\{\frac{2\pi k}{h}\right\}$ yra racionalusis skaičius su tam tikrais $k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$.

Literatūra

1. Bagchi B., 1981, *The statistical behaviour and universality properties of the Riemann zeta-function and other allied Dirichlet series,* Ph. D. Thesis, Calcuta, Indian Statistical Institute.

2. Breuil C., Conrad B., Diamond F., Taylor R., 2001, On the modularity of elliptic curves over **Q**: wild 3-adic exercises. *Journal of the American Mathematical Society,14*(4), 843–939. http://www.jstor.org/stable/827119

3. Garbaliauskienė V., Laurinčikas A., 2004, *Discrete value distribution of L-functions of elliptic curves. Publications de l'Institut Mathematique, 76* (90), 65–71. https://doi.org/10.2298/PIM0476065G

4. Garbaliauskienė V., Laurinčikas A., 2005, Some analytic properties for *L*-functions of elliptic curves. *Proceedings Institute of Mathematics NAN Belarus*, *13*(1), 75–82.

5. Garbaliauskienė V., Genys J., Laurinčikas A., 2008, Discrete universality of the *L*-functions of elliptic curves, *Siberian Mathematical Journal, 49*(4), 612–627. https://doi.org/10.1007/s11202-008-0058-0

6. Garbaliauskas A., 2018, *Universality theorems in physic. Jaunųjų mokslininkų darbai, 48*(2), 22–26. https://doi.org/10.21277/jmd.v48i2.223.

7. Kačinskaitė R., Laurinčikas A., 2004, *On the value distribution of the Matsumoto zeta-function. Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae, 105*(4), 339–359. https://doi.org/10.1023/B:AMHU.0000049284.92198.76.

8. Laurinčikas A., 1996, *Limit Theorems for the Riemann Zeta-Function*, Kluwer, Dordrecht.

9. Voronin S. M., 1979, *Analytic properties of Dirichlet generating functions of arithmetic objects. Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR, 24*, 966–969. https://doi.org/10.1007/BF01140029

10. Walsh J. L., 1960, Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain. *American Mathematical Society Colloquium Publications*, 20. https://doi.org/10.1126/science.85.2196.121