MATEMATINIAI METODAI GEOMETRINIAME DIZAINE

Rimvydas Krasauskas
Vilniaus universitetas, Naugarduko 24, 2006 Vilnius

Šiuolaikinė informacinių technologijų revoliucija atveria naujas matematikos taikymų galimybes. Čia mes trumpai pristatysime kompiuterinį geometrinį dizainą (projektavimą, modeliavimą). Plačiai vartojamas angliškas pavadinimas – Computer Aided Geometric Design (CAGD). Tai nauja, sparčiai besivystanti sritis informatikos ir geometrijos sandūroje. Geometrinis dizainas tiria kreivių ir paviršių aproksimacijas ir reprezentacijas kompiuterinėmis priemonėmis. Naujausi rezultatai įgyvendinami greitai tobulėjančiuose programų paketuose. Taikymų spektras platus – nuo automobilių ir lėktuvų projektavimo iki fizinės geografijos žemėlapių.

Istorija ir pagrindinės koncepcijos

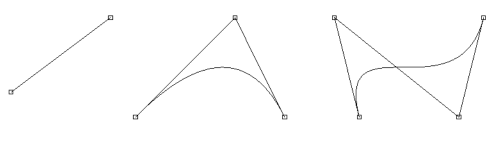
Prieš kompiuterių erą projektavimo uždaviniai buvo sprendžiami braižomosios geometrijos ir gipsinių (ar medinių) modelių pagalba. 50-taisiais metais paplito programuojamos staklės, kurios automatiškai vykdo frezavimo instrukcijas pagal komandas surašytas kompiuterinėje programoje. Norint pilnai panaudoti naujas galimybes, reikia turėti modeliuojamo paviršiaus aprašymą kompiuterinėje formoje. Iškilo poreikis rasti kuo paprastesnį matematinį modelį "laisvos formos" kreivėms ir paviršiams. Daugeliu atvejų klasikinės geometrijos metodai pasirodė nepakankami. Atsirado naujos kreivių ir paviršių konstrukcijos specialiai skirtos tam, kad kuo lengviau jomis galima būtų manipuliuoti.

Geometrinio dizaino pradžia galima laikyti tą momentą, kai nuo tiesinių (ir dalimis tiesinių) konstrukcijų buvo pereita prie polinominių ir splaininių struktūrų. Bézier kreives pirmasis pradėjo vartoti de Casteljau Citroën'o firmoje apie 1959 m. Deja jo darbai buvo įslaptinti, vėliau 1962 m. Bézier sukurta projektavimo sistema UNISURF firmoje Renault buvo plačiai aprašyta įvairiose publikacijose. Dėl to šioms kreivėms, o taip pat ir panašios konstrukcijos paviršiams prigijo Bézier vardas.

Bézier kreivė – tai polinomiškai parametrizuotos kreivės lankas užrašytas Bernstein'o polinomų $B_i^n(t)$ bazėje:

$$x(t) = b_0 B_0^n(t) + b_1 B_1^n(t) + \cdots + b_n B_n^n(t), \qquad B_i^n(t) = \binom{n}{i}(1-t)^{n-i}t^i.$$

Čia $t \in [0,1]$ yr … ai kontroliniai
taškai plokštumo … iesės atkarpą;
kai $n = 2$ – tai … vė dažniausiai
pasitaikanti prak



Pav. 1

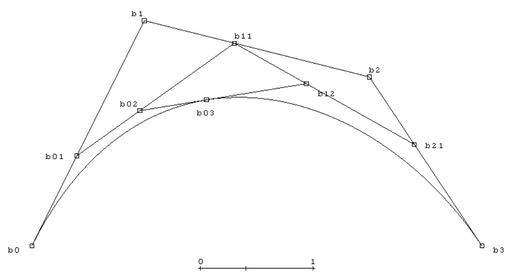
Kaip matome laužtė jungianti kontrolinius taškus apytiksliai parodo kreivės formą. Nesunku patikrinti, kad

(1) b_0 ir b_n yra galiniai kreivės taškai;

(2) liestinės galiniuose taškuose b_0 ir b_n turi atkarpų $\overline{b_0 b_1}$ ir $\overline{b_{n-1} b_n}$ kryptis;

(3) visa kreivė guli kontrolinių taškų $b_0, b_1, \ldots, b_n$ iškilame apvalke.

Taškas $x(t_0)$ ant Bézier kreivės gali būti apskaičiuotas naudojant de Casteljau algoritmą, kuris susiveda į rekurentinį tiesinį interpoliavimą. `Pav. 2` iliustruoja kubinės kreivės atveii.



`Pav. 2`

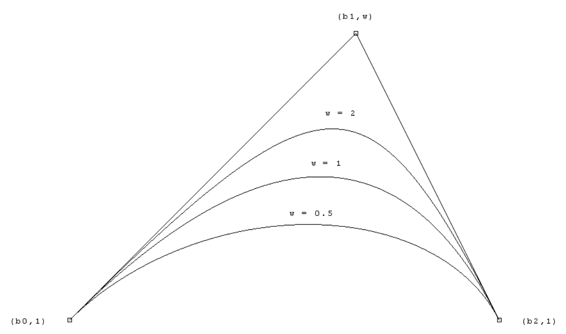
Čia visos atkarpos dalinamos fiksuotu santykiu $t_0 : (1 - t_0)$ pagal formulę: $b_{ik} := (1 - t_0) b_{i,k-1} + t_0 b_{i+1,k-1}$, $b_{i0} := b_i$. b_{03} – tai ieškomoji reikšmė $x(t_0)$. Pasirodo, kad tarpiniuose skaičiavimuose gauti taškai turi svarbią informaciją. Pavyzdžiui, taškai b_0, b_{01}, b_{02} ir b_{03} yra duotosios Bézier kreivės lanko, atitinkančio parametrą $0 \leq t \leq t_0$, kontroliniai taškai. Tokiu būdu, galima paprastai ir greitai rasti bet kokią kreivės dalį.

Norint gauti pakankamai sudėtingas formas, kurias po to galima būtų lokaliai keisti, polinominių konstrukcijų neužtenka. Čia buvo rasta išeitis naudojant splainus – dalimis polinomines pakankamai glodžias funkcijas. Schoenberg'as jau apie 1946 m. atrado patogią splainų erdvės bazę, taip vadinamus B-splainus. De Boor'as dirbdamas General Motors kompanijoje 1972 m. pritaikė splainus kreivių modeliavimui. Gordon'as ir Riesenfeld'as (1974 m.) parodė, kad Bézier kreivės yra tik atskiras naujos teorijos atvejis.

Normalizuoti B-splainai $N_i^n(u)$ yra n-to laipsnio polinomai kiekviename intervale (u_i, u_{i+1}), o "mazgų" taškuose $\cdots \leq u_0 \leq u_1 \leq u_2 \cdots$ – tai $(n-1)$ kartą tolydžiai diferencijuojamos funkcijos. B-splaininės kreivės formulę gausime, jeigu Bézier kreivės formulėje pakeisime Bernstein'o polinomus normalizuotais B-splainais $N_i^n(u)$: $s(u) = \sum_i d_i N_i^n(u)$. Kontroliniai taškai d_i čia vadinami de Boor'o taškais. Faktiškai gauname teoriją, kuri labai panaši į Bézier kreivių teoriją. Yra tik vienas esminis skirtumas: lokalinės kontrolės savybė. Keičiant vieną de Boor'o tašką keivė keičiasi tik lokaliai (tik lanke nuo $s(u_i)$ iki $s(u_{i+n+1})$).

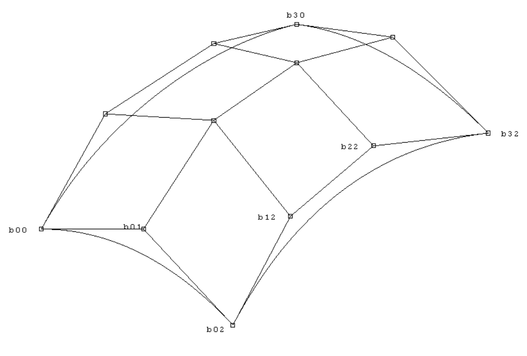
B-splainų pritaikymas sukėlė tikrą revoliuciją kreivių ir paviršių modeliavime. Tai leido matematiškai aprašyti paviršius, kuriais manipuliuoti senoviškais metodais praktiškai neįmanoma. Pavyzdžiui, 30–50 tūks. taškų apimties geometriniai duomenys pasidarė įprasti. R. Saraga iš General Motors tyrimų grupės tvirtina, kad “B-splainų vaidmuo geometriniame dizaine analogiškas vidaus degimo variklių reikšmei automobiliams”.

Svarbų geometrinio dizaino istorijų etapą gerai iliustruoja Boeing'o firmos projektavimo sistemų evoliucija. Nuo 1945 m. lėktuvų fiuzeliažų modeliavimui buvo naudojamos konikos (2-os eilės kreivės). Po to, 60-taisiais metais vadovaujant Ferguson'ui buvo pradėtos įsisavinti splaininės technologijos. Deja, šie du metodai pasirodė sunkiai suderinami. Iš visų konikų tik parabolės turi polinomines parametrizacijas, o jau apskritimas gali būti parametrizuotas tik racionaliomis funkcijomis (t.y. polinomų santykiais). Atsiradus užsakovams Coons'as (iš MIT) 1967 m. “racionalizavo” Bézier kreivių, o vėliau ir B-splainų teoriją. Naujieji splainai buvo pavadinti NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines). Išoriškai visa teorija mažai pakito: tik kontroliniai taškai b_i buvo pakeisti taškais su “svoriais” (b_i, w_i), $w_i > 0$. `Pav.3` matome, kaip keičiasi 2-o laipsnio Bézier kreivė, keičiant vidurinio taško (b_1, w) svorį w: kai $w = 1$ turime parabolę, kai $w > 1$ – hiperbolę, kai $w < 1$ – elipsę.



Pav.3

Visa tai kas pasakyta apie kreives turi savo analogus paviršių atveju. Daugelį šių konstrukcijų galima sutinkti jau de Casteljau darbuose. `Pav.4` matome $(2, 3)$ laipsnio tenzorinės sandaugos paviršių:



Pav.4

Čia taškai $\{b_{ij}\}$, $i = 0, \ldots, 3$, $j = 0, 1, 2$, sudaro tinklą, kuris pilnai kontroliuoja paviršių. Paviršiaus kraštas susideda iš Bézier kreivių: pvz., dvi artimiausios kraštinės kreivės turi kontrolinius taškus: b_{00}, b_{01}, b_{02} ir b_{02}, b_{12}, b_{22}, b_{32} atitinkamai. Analogiškai konstruojami paviršiniai B-splainai. Suteikdami de Boor'o taškams svorius gausime paviršinius NURBS'us, kuriais galima tiksliai reprezentuoti visus racionalius paviršius. Detales galima rasti knygoje [1].

Geometrinio dizaino arsenale NURBS'ai užima vieną iš centinių vietų. Jų vertingos savybės (lokalinė kontrolė, rekursyvus reikšmių skaičiavimas ir smulkinimas, unifikuojanti reikšmė) gerokai persveria jų prigimtinį sudėtingumą. Nors dabartiniu metu NURBS'ai *de facto* įsigalėjo daugelyje programinių sistemų (AutoCAD, PHIGS++, grafikos standarte OpenGL ir t. t.), teorinis NURBS'ų tyrinėjimas faktiškai dar tik prasidėjo. Randami vis nauji ryšiai su klasikine geometrija. Tai veda prie gilesnės geometrinio dizaino matematizacijos ir atveria plačias matematinių metodų taikymo perspektyvas.

Autoriaus darbo kryptis

Modeliuotojai praktikai dažnai susiduria su geometrinių duomenų konvertavimo problema į NURBS'ų formatą. Yra žinoma daug projektavimo sistemų dirbančių su tradiciniais paviršiais: cilindru, kūgiu, sfera, toru. Čia kyla natūralus klausimas: "Kaip parametrizuoti duotą tokio paviršiaus skiautę, kuri apribota duotomis racionaliomis n-to laipsnio kreivėmis, kad gautume mažiausio laipsnio Bézier paviršių?"

Atveju, kai $n = 2$, 2-os eilės paviršiams ši problema buvo išspręsta 1993 m. darbe [2]. Universalios parametrizacijos konstrukcija, aprašyta autoriaus darbuose [3, 4], leido šį uždavinį išspręsti bet kokiems laipsniams n, o toro atveju, kai $n \leq 4$.

Vėliau tapo aišku, kad universalias parametrizacijas turi visa klasė paviršių, vadinamų toriniais. (Torinės daugdaros algebrinėje geometrijoje buvo "atrastos" apie 1970 m.) Daugelis paviršių naudojamų modeliavime (visi 2-os eilės paviršiai, kūgiai virš racionalių kreivių, torai, Dupin'o ciklidės...) pasirodė esą toriniai, o pagrindiniai Bézier paviršių tipai atitinka nuo seno žinomus Segre ir Veronese's paviršius (kurie yra toriniai). Tai leidžia apibendrinti aukščiau minėtus rezultatus. Be to, naudojant netradicines torines struktūras yra gautos naujus modeliavimo schemos:

- 4 kontrolinių taškų tinklas elipsoidams, 2-šakiams hiperboloidams ir elipsiniams paraboloidams [5];
- 5 kontrolinių taškų tinklas keturkampei toro ar Dupin'o ciklidės skiautei (buvo naudojama $(2, 2)$ tenzorinės sandaugos konstrukcija su 9 kontroliniais taškais).

Literatūra

1. G. Farin, *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design: A Practical Guide,* 2-nd ed., New York, Academic Press, 1993.

2. R. Dietz, J. Hoschek, B. Jüttler, *An algebraic approach to curves and surfaces on*

the sphere and other quadrics, Computer Aided Geometric Design **10**, p. 211–229, (1993).

3. R. Krasauskas, *Rational Bézier surface patches on quadrics and the torus, Preprintas 95–25,* Vilniaus universitetas, 1995.

4. R. Krasauskas, *Universal parameterizations of some rational surfaces, In: Proceedings of Chamonix 1996, Ed. by A. Le Méhauté, C. Rabut, L. L. Schumaker,* Vanderbilt University Press, Nashville, TN, 1997, p. 231–238.

5. K. Karčiauskas, R. Krasauskas, *Rational biangle patch, Preprintas* (paruoštas spaudai).