Nonlinear Analysis: Modelling and Control, Vilnius, IMI, 1998, No 2

NEUTRONŲ DIFUZIJOS LYGTIES SKAITINIAI SPRENDIMO METODAI

Mifodijus Sapagovas, Virginijus Vileiniškis
Vytauto Didžiojo universitetas, S.Daukanto 28, LT-3000, Kaunas
Matematikos ir informatikos institutas, Akademijos 4, LT-2600, Vilnius

Darbe nagrinėjama viena iš problemų, susijusių su saugiu atominės elektrinės eksploatavimu.

Atominė elektrinė yra sudėtingas inžinerinis įrenginys. Pagrindinė AE dalis yra reaktorius. Nagrinėsime procesus, vykstančius neutronams sąveikaujant su medžiaga branduoliniuose reaktoriuose. Branduoliniu reaktoriumi vadinamas įrenginys, kuriame laisvųjų neutronų poveikio pasekoje vykdoma valdoma grandininė sunkiojo metalo branduolių dalijimosi reakcija. Priklausomai nuo neutronų judėjimo, reaktoriai skirstomi į veikiančius greitaisiais neutronais (neutronų greitis apie 100 000 km/s) ir veikiančius lėtaisiais (šiluminiais) neutronais (apie 2,2 km/s).

Pernešimo lygtys aprašo įvairiausius procesus: procesus, vykstančius branduoliniuose reaktoriuose, šviesos išsklaidymą atmosferoje, rentgeno ir gama spindulių perėjimą per medžiagą, spinduliavimo pernešimą žvaigždžių atmosferose ir t.t.

Tipinė neutrono trajektorija medžiagoje susideda iš tiesių skirtingo ilgio atkarpų, jungiančių atskirų susidūrimų vietas. Kiekviena trajektorija nutrūksta ten, kur neutronas arba sugeriamas, arba išlekia iš tūrio, kuriame yra nagrinėjama medžiaga.

Difuzijos lygtis aprašo didelio neutronų kiekio elgesį, kada atskirų trajektorijų individualios ypatybės 'suvidurkinamos'.

Jei padarysime prielaidas, kad

1) išsklaidymas izotropinis laboratorinėje koordinačių sistemoje, t.y. neutronas gali nuskristi bet kuria kryptimi nuo išsklaidančiojo centro (branduolio) su vienoda tikimybe,
2) vidutinis laikas tarp dviejų vienas paskui kitą sekančių išsklaidančių susidūrimų daug mažesnis už laiką, kurio metu ženkliai pasikeičia neutronų pasiskirstymas medžiagoje,
3) nagrinėsime tik tuos srities taškus, kurie nutolę daugiau kaip per du–tris neutronų laisvojo kelio ilgius nuo stiprių šaltinių, stiprių sugėrėjų, vakuumo – medžiagos ribų ir ribų tarp sričių su smarkiai besiskiriančiomis savybėmis,
4) visi neutronai turi vienodą energiją,
5) neutronas – bestruktūrinė dalelė, kuriai galioja klasikinės mechanikos dėsniai,

6) neutronų tarpusavio sąveikos galima neįvertinti, tačiau neutronų tankis pakankamai didelis, kad jiems būtų galima taikyti pagrindinius statistinės fizikos dėsnius,
7) neutronai gali atsirasti branduolių skilimo reakcijos metu ir gali būti sugeriami absorbcijos reakcijos metu,
8) nagrinėjamoje srityje sugavimo skerspjūvis Σ_a daug mažesnis už išskaidymo skerspjūvį Σ_s,

pasinaudoję energijos tvermės dėsniu, gausime:

$$\frac{1}{v_c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = D\nabla^2\varphi - \Sigma_a\varphi + q,$$

su pradinėmis $\varphi(x,0) = \varphi_0(x)$ ir kraštinėmis sąlygomis $\varphi(x_{ekv}, t) = 0$; čia v_c – neutronų judėjimo greitis, $\varphi = \varphi(x,t)$ – neutronų srauto tankis, $D = 1/3\Sigma_s$ – neutronų difuzijos koeficientas, $q = q(x,t)$ – šaltinių tankis, $x = (x_1, x_2, x_3)$ – srities V taškas.

Neutronai atsiranda praktiškai tuo pačiu metu, kai sunkių nuklidų branduoliai skyla į skeveldras. Kai kurių skeveldrų perėjimas iš sužadintos į pagrindinę būseną lydimas silpno neutroninio spinduliavimo, kurio intensyvumas staigiai padidėja po tam tikro laiko momento. Tai paaiškinama kelių neutronų grupių, atsirandančių po didelio laiko tarpo (iki 80 s) nuo branduolio skilimo momento, išspinduliavimu. Šie neutronai vadinami vėluojančiais. Nors vėluojančių neutronų dalis bendrame neutronų kiekyje tik apie 0.75%, jie suteikia galimybę valdyti branduolinio reaktoriaus darbą.

Įvertinus vėluojančių neutronų poveikį, difuzijos procesą aprašo lygčių sistema [1]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_c}\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t} &= D\nabla^2\varphi(x,t) + (\gamma\Sigma_f - \Sigma_a)\varphi(x,t) + \lambda C(x,t), \\ \frac{\partial C(x,t)}{\partial t} &= \beta\gamma\Sigma_f\varphi(x,t) - \lambda C(x,t), \end{aligned} \tag{1}$$

su pradinėmis $\varphi(x,0) = \varphi_0(x)$, $C(x,0) = C_0(x)$ ir 1, 2 arba 3 tipo kraštinėmis sąlygomis. Šioje lygčių sistemoje γ – vidutinis neutronų, atsirandančių vieno dalijimosi proceso metu, skaičius, Σ_f – makroskopinis dalijimosi pjūvis, λ – skilimo pastovioji, β – vėluojančių neutronų dalis, C – branduolių, iš kurių atsiranda vėluojantys neutronai, koncentracija.

Pažymėję
$$\Sigma = \gamma\Sigma_f - \Sigma_a, \quad B = \beta v_c \Sigma_f,$$
ir užrašę (1) lygčių sistemos antros lygties sprendinį

$$C = e^{-\lambda t}\int_0^t Be^{\lambda t_1}\varphi\, dt_1,$$

gauname parabolinio tipo lygtį, kuri yra atskiras lygties su atmintimi

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + Au(x,t) = \int_0^t f(t,s,x,u(x,s))ds,$$

kur A – savijungtinis elipsinio tipo operatorius, atvejis.

Panaudoję suminės aproksimacijos metodą, kurio pagrindines idėjas A.Samarskis suformulavo darbe [2] ir išvystė kituose darbuose, (1) lygčių sistemą užrašome:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{v_c}\frac{\partial \varphi_{(1)}}{\partial t} - D\frac{\partial^2 \varphi_{(1)}}{\partial {x_1}^2} - \frac{1}{3}\Sigma\varphi_{(1)} = \frac{1}{3}\lambda e^{-\lambda t}\int_0^t Be^{\lambda t_1}\varphi_{(1)}dt_1,\\
&\frac{1}{v_c}\frac{\partial \varphi_{(2)}}{\partial t} - D\frac{\partial^2 \varphi_{(2)}}{\partial {x_2}^2} - \frac{1}{3}\Sigma\varphi_{(2)} = \frac{1}{3}\lambda e^{-\lambda t}\int_0^t Be^{\lambda t_1}\varphi_{(2)}dt_1, \qquad (2)\\
&\frac{1}{v_c}\frac{\partial \varphi_{(3)}}{\partial t} - D\frac{\partial^2 \varphi_{(3)}}{\partial {x_3}^2} - \frac{1}{3}\Sigma\varphi_{(3)} = \frac{1}{3}\lambda e^{-\lambda t}\int_0^t Be^{\lambda t_1}\varphi_{(3)}dt_1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\varphi_{(1)}(x,0) = \varphi_0(x),\\
&\varphi_{(1)}(x,t_j) = \varphi_{(3)}(x,t_j), \quad t_j \le t \le t_{j+1},\\
&\varphi_{(2)}(x,t_j) = \varphi_{(1)}(x,t_{j+1}),\\
&\varphi_{(3)}(x,t_j) = \varphi_{(2)}(x,t_{j+1}).
\end{aligned}$$

Tarkime, kad žinome sprendinį $\varphi(x,t_j)$ laiko momentu t_j, tuomet iš (2) sistemos pirmos lygties nustatome $\varphi_{(1)}(x,t_{j+1})$ reikšmę, kurią panaudojame kaip pradinę reikšmę antros lygties sprendimui ir t.t. Išsprendę visas (2) sistemos lygtis, randame $\varphi_{(3)}(x,t_{j+1})$ reikšmę, kuri ir yra šios sistemos sprendinys laiko momentu t_{j+1}.

Parodysime, kad (2) lygčių sistema aproksimuoja (1) suminės aproksimacijos prasme.

Tegul $\varphi^*(t)$ yra (1) sistemos sprendinys, $\varphi_{(1)}$, $\varphi_{(2)}$, $\varphi_{(3)}$ – (2) sistemos sprendinys. Nagrinėsime skirtumą

$$\begin{aligned}
&z_{(i)}(t) = \varphi_{(i)}(t) - \varphi^*(t_{j+1}), \quad t_j \le t \le t_{j+1},\\
&z_{(1)}(t) = \varphi_{(1)}(t) - \varphi^*(t).
\end{aligned}$$

Įstatome

$$\begin{aligned}
&\varphi_{(i)}(t) = z_{(i)}(t) + \varphi^*(t_{j+1}), \quad i = 2,3,,\\
&\varphi_{(1)}(t) = z_{(1)}(t) + \varphi^*(t)
\end{aligned}$$

į (2) lygčių sitemą. Pažymėję

$$A_i u = -D\frac{\partial^2 u}{\partial {x_i}^2} - \frac{1}{3}\Sigma u - \frac{1}{3}\lambda e^{-\lambda t}\int_0^t Be^{\lambda t_1}u dt_1,$$

turime:

$$\frac{1}{v_c}\frac{\partial z_{(1)}(t)}{\partial t}+A_1 z_{(1)}(t)=\psi_1,$$
$$\frac{1}{v_c}\frac{\partial z_{(2)}(t)}{\partial t}+A_2 z_{(2)}(t)=\psi_2,$$
$$\frac{1}{v_c}\frac{\partial z_{(3)}(t)}{\partial t}+A_3 z_{(3)}(t)=\psi_3,\quad t_j\le t\le t_{j+1},$$
$$z_{(1)}(0)=0,$$
$$z_{(1)}(t_j)=z_{(3)}(t_j),$$
$$z_{(2)}(t_j)=z_{(1)}(t_{j+1}),$$
$$z_{(3)}(t_j)=z_{(2)}(t_{j+1}).$$

Čia

$$\psi_1+\psi_2+\psi_3=\psi=-\frac{1}{v_c}\frac{\partial\varphi^*(t)}{\partial t}-A_1\varphi^*(t)-A_2\varphi^*(t_{j+1})-A_3\varphi^*(t_{j+1}).$$

Įvertinę, kad

$$\varphi^*(t_{j+1})=\varphi^*(t)+o(\tau),\quad t_j\le t\le t_{j+1},$$

gauname, kad (2) lygčių sistema aproksimuoja (1) sumine prasme tikslumu $o(\tau)$. Tai reiškia, kad trimatę (1) lygčių sistemą galime pakeisti to paties tipo vienmačių lygčių sistema (2).

Panagrinėsim (2) lygčių sistemos diskretizavimą laiko atžvilgiu.

Tegul τ – laiko žingsnis, $t_n=n\tau$, tuomet pritaikę Eilerio schemą (2) lygčių sistemos pirmajai lygčiai turime:

$$\frac{1}{v_c}\frac{u_{(1)}^n-u_{(1)}^{n-1}}{\tau}-D\frac{\partial^2 u_{(1)}^n}{\partial {x_1}^2}-\frac{1}{3}\Sigma u_{(1)}^n=\frac{1}{3}\lambda e^{-\lambda n\tau}\sum_{j=0}^{n-1}Be^{\lambda j\tau}u_{(1)}^j.$$

Pažymime integralo aproksimavimo paklaidą $q_n(\varphi)$.

Tuomet, kai operatorius $A=-D\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{3}\Sigma$ teigiamai apibrėžtas ir savijungtinis, remiantis teorema, suformuluota [3], gauname įvertį:

$$\left\|u_{(1)}^n-\varphi_{(1)}(t_n)\right\|\le c\left\{\left\|u_{(1)}^0-\varphi_0\right\|+\tau\int_0^{t_n}\left\|\varphi_{(1)tt}(s)\right\|ds+Q_n(u)\right\},$$

čia $\|\cdot\|$ – norma erdvėje $L_2(V)$,

$$Q_n(u)=\tau\sum_{j=1}^{n}\|q_j(\varphi)\|.$$

Atitinkamai antrai ir trečiai lygčiai

$$\|u_{(2)}^n-\varphi_{(2)}(t_n)\|\le c\big\{\|u_{(2)}^0-\varphi_{(2)}(0)\|+\tau\int_0^{t_n}\|\varphi_{(2)tt}(s)\|\,ds+Q_n(u)\big\},$$

$$\|u^n_{(3)} - \varphi_{(3)}(t_n)\| \le c\Big\{\|u^0_{(3)} - \varphi_{(3)}(0)\| + \tau \int\limits_0^{t_n} \|\varphi_{(3)tt}(s)\|\,ds + Q_n(u)\Big\},$$

$$\varphi_{(2)}(0) = \varphi_{(1)}(\tau), \quad u^0_{(2)} = u^\tau_{(1)},$$
$$\varphi_{(3)}(0) = \varphi_{(2)}(\tau), \quad u^0_{(3)} = u^\tau_{(2)}.$$

Galutinai

$$\|u^n_{(3)} \;-\; \varphi_{(3)}(t_n)\| \le c\Big\{\|u^0_{(1)} - \varphi_0\| + \tau \int\limits_0^{\tau} \|\varphi_{(1)tt}(s)\|\,ds + Q_\tau(u)\Big\}$$
$$+ \;\; c_1\Big\{\tau \int\limits_0^{\tau} \|\varphi_{(2)tt}(s)\|\,ds + Q_\tau(u)\Big\} + c_2\Big\{\tau \int\limits_0^{t_n} \|\varphi_{(3)tt}(s)\|\,ds + Q_\tau(u)\Big\}.$$

Įvertinę aproksimaciją pagal erdvinius kintamuosius, gauname:

$$\|u^n_{h(3)} - \varphi_{(3)}(t_n)\| \le c\Big\{\|u^0_{h(1)} - \varphi_0\| + \tau \int\limits_0^{\tau} \|\varphi_{(1)tt}(s)\|\,ds + Q_\tau(u)\Big\}$$
$$+ c_1\Big\{\tau \int\limits_0^{\tau} \|\varphi_{(2)tt}(s)\|\,ds + Q_\tau(u)\Big\} + c_2\Big\{\tau \int\limits_0^{t_n} \|\varphi_{(3)tt}(s)\|\,ds + Q_\tau(u)\Big\} + R_h(u),$$

čia $R_h(u)$ aproksimacijos pagal erdvinius kintamuosius paklaida. Reiškia, (2) lygčių sistemos diskretizavimui laiko atžvilgiu panaudoję Eilerio schemą, gauname lygčių sistemą, kurios sprendinys konverguoja į (2) lygčių sistemos sprendį.

Parinkę (1) lygčių sistemoje esančių dalinių išvestinių pagal erdvinius kintamuosius aproksimavimą

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\varphi(x+h,t) - 2\varphi(x,t) + \varphi(x-h,t)}{h^2},$$

gauname lygčių sistemą

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{v_c}\frac{\varphi_{(1)}(x,t) - \varphi_{(1)}(x,t-\tau)}{\tau} - D\frac{\varphi_{(1)}(x+h_1,t) - 2\varphi_{(1)}(x,t) + \varphi_{(1)}(x-h_1,t)}{h_1^2}\\
&-\frac{1}{3}\Sigma\varphi_{(1)}(x,t) = \frac{1}{3}\lambda e^{-\lambda t}\sum_{j=0}^{n-1} Be^{\lambda j\tau}\varphi_{(1)}(x,j\tau),\\
&\frac{1}{v_c}\frac{\varphi_{(2)}(x,t) - \varphi_{(2)}(x,t-\tau)}{\tau} - D\frac{\varphi_{(2)}(x+h_2,t) - 2\varphi_{(2)}(x,t) + \varphi_{(2)}(x-h_2,t)}{h_2^2}\\
&-\frac{1}{3}\Sigma\varphi_{(2)}(x,t) = \frac{1}{3}\lambda e^{-\lambda t}\sum_{j=0}^{n-1} Be^{\lambda j\tau}\varphi_{(1)}(x,j\tau),\\
&\frac{1}{v_c}\frac{\varphi_{(3)}(x,t) - \varphi_{(3)}(x,t-\tau)}{\tau} - D\frac{\varphi_{(3)}(x+h_3,t) - 2\varphi_{(3)}(x,t) + \varphi_{(3)}(x-h_3,t)}{h_2^3}\\
&-\frac{1}{3}\Sigma\varphi_{(3)}(x,t) = \frac{1}{3}\lambda e^{-\lambda t}\sum_{j=0}^{n-1} Be^{\lambda j\tau}\varphi_{(1)}(x,j\tau).
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\varphi_{(1)}(x,0)=\varphi_0(x),$$
$$\varphi_{(1)}(x,t)=\varphi_{(3)}(x,t),$$
$$\varphi_{(2)}(x,t-\tau)=\varphi_{(1)}(x,t),$$
$$\varphi_{(3)}(x,t-\tau)=\varphi_{(2)}(x,t).$$

Si lyčių sistema aproksimuoja (1) lygčių sistemą tikslumu $o(\tau+h^2)$.

Kadangi (3) lygčių sistemos matrica yra tridiagonalinė, jos sprendimui naudosime perkelties metodą, aprašytą [4].

Priklausomai nuo srities fizinių savybių galime išskirti tris atvejus:

1. $\Sigma=\gamma\Sigma_f-\Sigma_a>0$, t.y. visoje dalijimosi metu atsiranda daugiau neutronų, negu jų sugeriama toje pačioje srityje;

2. $\Sigma=0$, t.y. dalijimosi metu atsiranda lygiai tiek neutronų, kiek jų sugeriama;

3. $\Sigma<0$, t.y. visoje srityje dalijimosi metu atsiranda mažiau neutronų, negu ju sugeriama toje pačioje srityje.

1 atveju norint užtikrinti skirtuminių lygčių sistemos sprendimo perkelties metodu stabilumą, turi būti patenkinta sąlyga:

$$\tau\leq\frac{3}{v_c\Sigma}.$$

2 ir 3 atvejais perkelties metodas yra besąlygiškai stabilus.

(1) lygčių sistemai reikia atskirai aptarti kraštines sąlygas [1]. Nagrinėsime homogeninį reaktorių be neutronų reflektoriaus. Jei aktyvinė zona yra patalpinta vakuume (ore) arba apsupta absoliučiai absorbuojančia medžiaga, tai neutronų judėjimas iš vakuumo i aktyvinę zoną nevyksta ir kraštinė sąlyga bus:

$$\frac{\varphi(R_{a,z},t)}{2}+D\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=R_{a,z}}=0, \tag{4}$$

čia $R_{a,z}$ – aktyvinės zonos spindulys. (4) kraštinę sąlygą galime apytiksliai pakeisti sąlyga:

$$\varphi(R_{ekv},t)=0, \tag{5}$$

čia R_{ekv} – aktyvinės zonos ekvivalentinis spindulys.

Nagrinėjant reaktorių su reflektoriumi, reflektoriaus išorėje kraštinė sąlyga išlieka tokia pati, tik prie aktyvinės zonos išmatavimų reikia pridėti efektyvinį reflektoriaus priedą δ_{ef}.

Nagrinėjant heterogeninį, t.y. sudarytą iš tam tikrų blokų su skirtingomis savybėmis, reaktorių, dviejų aplinkų kontaktiniame paviršiuje turime:

$$\varphi(x,t)_{S-0}=\varphi(x,t)_{S+0}$$
$$D\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}\Big|_{S-0}=D\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}\Big|_{S+0}, \tag{6}$$

čia S – aplinkų kontaktinis paviršius. Be to, gali buti naudojamas atspindžio koeficientas, arba albedo β, kuris yra lygus neutronų srautų tankių neigiama ir teigiama kryptimis per kontaktinį paviršių santykiui. Tuomet dviejų aplinkų kontaktiniame paviršiuje

$$\left.\frac{\varphi(x,t)}{2}\right|_S + \frac{1-\beta}{1+\beta} D \left.\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}\right|_S = 0. \tag{7}$$

Mūsų nagrinėjamu atveju turime (5) tipo kraštines sąlygas.

LITERATŪRA

1. Ганев И. Х. *Физика и расчет реактора.* - М.: Энергоиздат, 1981. - 368с.
2. Самарский А. А. Об одном экономичном разностном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области. ЖВМ и МФ 2, No 5 (1962), 787–811.
3. Roux and V. Thomee, Numerical solution of semilinear integrodifferential equations of parabolic type with nonsmooth data, *SIAM J. Numer. Anal.*, 26 (1989), pp. 1291–1309.
4. Самарский А. А. *Теория разностных схем.* - М.: Наука, 1983 - 616с.