

Vertės pokyčio rizikos vertinimas taikant vienmatį režimų pasikeitimo MS–GJR–GARCH kopulos modelį

Eugenijus Gabrieliūs Ivanauskas, Saulius Jokubaitis

Vilniaus Universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas,
Naugarduko g. 24, Vilnius
gabrielius.ivanauskas@mif.stud.vu.lt, saulius.jokubaitis@mif.vu.lt

Santrauka. Vertės pokyčio rizikos rodiklis yra vienas dažniausiai naudojamų pinigų finansų įstaigų sektoriuje galimam nuostoliui vertinti. Šiame darbe pastarasis rodiklis yra vertinamas taikant vienmatį režimų pasikeitimo MS–GJR–GARCH kopulos modelį, kuris modeliuoja ne tik volatilumą bei jo pokytį laike, bet ir atsižvelgia į priklausomybės struktūrą. Nagrinėjant du portfelius prieita prie išvadų, kad labiau diversifikuotam krepšeliui tiksliausiai riziką vertino dviejų režimų MS–GJR–GARCH modelis su asimetriniu Studento–t pasiskirstymu standartizuotoms liekanoms bei *Joe* kopula, o labiau volatiliam portfeliui – identiškas modelis volatilumui, bet su *Gumbel* kopula. Rezultatais akcentuojama kopulų svarba rizikos vertinime, išryškinamas kopulų dinamikos modeliavimo poreikis.

Raktiniai žodžiai: vertės pokyčio rizika, režimų pasikeitimas, MS–GJR–GARCH, kopula.

1 Įvadas

Finansų valdyme rizika yra apibrėžiama kaip galimybė, kad grąža iš investicijų arba kitų sandorių bus mažesnė už prognozuotą, o blogiausiu atveju – neigiama [1]. Rizika, prarandant finansus pinigų finansų įstaigų sektoriuje, yra vienas esminių rodiklių, ką šios turi vertinti nuolat. Tai leidžia laiku identifikuoti galimas grėsmes ir imtis prevencinių priemonių, siekiant apsaugoti savo kapitalą ir (arba) klientų lėšas. Nuo tikslaus rizikos vertinimo gali priklausyti finansų paskirstymas, strategija bei jos valdymas, pinigų finansų įstaigų atsparumas šokams kriziniu laikotarpiu, o visa tai formuoja įmonės patikimumą investuotojų akyse. Siekiant prisidėti prie globalaus finansinio stabilumo užtikrinimo ir gairių apibrėžimo 1974 metais buvo įkurtas Bazelio komitetas. Pastarasis tarnavo ir tebetarnauja kaip forumas arba platforma reguliariam bendradarbiavimui pinigų finansų įstaigų priežiūros reikalams [2].

Vertės pokyčio rizika (VPR, angl. *Value-at-risk, VaR*) yra vienas pagrindinių rodiklių vertinant rinkos riziką. Jis yra apibrėžiamas kaip maksimalus galimas nuostolis tam tikru laikotarpiu, esant pasirinktam reikšmingumo lygmeniui. Nors VPR koncepcijos ištakos siekia XX amžiaus pradžią, šio rodiklio vertinimas buvo pradėtas tik pastarojo amžiaus pabaigoje. Tą patvirtina 1987 metais įvykęs vertybinių popierių rinkos žlugimas po kurio prasidėjo minėtojo rodiklio skaičiavimo tobulinimai, naujų algoritmų paieška [3]. Vienas dažnesnių metodų vertinant minėtą rodiklį yra volatilumo modeliai. Tačiau dėl to, kad skirtingais laikotarpiais rinkos volatilumas nėra vienodas, praktikoje įprasta nagrinėti modelius, kurie efektyviai tai įvertina – dviejų režimų ARCH modelis [4], trijų režimų daugiamačio GARCH kopulos modelis [5]. Taip pat VPR vertinimui naudojami ir skirtingi kopulų įtraukiantys modeliai, kurie skirti portfelio aktyvų priklausomybės struktūrai įvertinti [6, 7, 8].

Šio straipsnio tikslas – plėsti VPR rodiklio vertinimą bei analizę, skirtingo diversifikavimo krepšeliams rasti tiksliausių modelių VPR vertinimui. Modelis turi būti konstruojamas atsižvelgiant į režimų pasikeitimą, modeliuojant volatilumą MS–GJR–GARCH modeliu bei priklausomybės struktūrą vertinant kopulomis. Režimų pasikeitimo modelio naudojimas grindžiamas jo efektyvumu praktikoje [4, 5, 8], o pasirinktas volatilumo modelis – demonstruojamu tikslumu bei lankstumu (asimetriškumas) [8, 9, 10]. Atradus tinkamą junginį, svarbu apžvelgti modelio savybes bei pagrįsti jo tinkamumą teoriškai.

2 Metodologija

Šiame straipsnyje konstruojami du portfeliai: pirmajame pasirinkta naudoti tris indeksus, atliepiančius Jungtinių Amerikos Valstijų bei Europos rinkas – S&P 500 (indeksas, jungiantis JAV 500 didžiausių įmonių), FTSE 100 (atspindi Londono biržoje prekiaujamų 100 didžiausių įmonių) bei EURO STOXX 50 (indeksas, apimantis 50 didžiausių bendrovių iš euro zonos). Antras krepšelis sudarytas iš trijų pasirinktų akcijų: *Walt Disney*, *Intel* ir *JP Morgan*. Duomenys yra dieninio dažnumo, juose naudojamos dienos uždarymo kainos. Visas duomenų rinkinys yra nuo 2007–03–30 iki 2025–03–16, iš viso 4346 stebiniai.

Antrojo portfelio rizika yra didesnė, grąža gali priklausyti tiek nuo lokalių (šalies/sektoriaus) šokų, tiek nuo ekonominės bei geografinės aplinkos

dinamikos (verslo/kreditų ciklų), kompanijų reputacijos bei vartotojų pasitikėjimo ir pan. Tuo tarpu diversifikuotas portfelis – mažesnės rizikos, atsparesnis lokaliems šokams. Bendros ekonominės, socialinės arba geografinės tendencijos yra svarbios, tačiau indeksai apima ir neigiamas žinias atsveriančius (balansuojančius) aktyvus. Todėl pastarasis portfelis plačiai nagrinėjamas ir naudojamas tiek institucinių, tiek smulkiųjų investuotojų.

Kasdienės grąžos apskaičiuojamos pagal (1) formulę:

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}, \quad (1)$$

čia P_t yra aktyvo uždarymo kaina. Daroma prielaida, kad R_t yra stacionarus procesas su vidurkiu μ ir standartiniu nuokrypiu σ . Volatilumas yra modeliuojamas taikant režimų pasikeitimo vienmatį GJR–GARCH modelį, kuriam neigiami šokai turi didesnę poveikį už teigiamus:

$$h_{k,t} = \alpha_{0,k} + (\alpha_{1,k} + \alpha_{2,k} I\{y_{t-1} < 0\}) y_{t-1}^2 + \beta_k h_{k,t-1}, \quad (2)$$

čia k yra esamo režimo reikšmė (1, 2 arba 3, priklausomai nuo nagrinėjamo modelio), parametrai $\alpha_{0,k} > 0, \alpha_{1,k} > 0, \alpha_{2,k} > 0, \beta_k \geq 0, I\{\cdot\}$ yra indikatoriaus funkcija, kuri įgyja reikšmes 1 arba 0. Tada režimų pasikeitimo modelis apibrėžiamas su (3) formule:

$$y_t | (s_t = k, I_{t-1}) \sim D(0, h_{k,t}, \epsilon_k), \quad (3)$$

čia s_t yra Markovo grandinė, įgyjanti reikšmes $\{1, \dots, K\}$, I_{t-1} yra informacijos aibė iki laiko momento $t - 1$, $D(\cdot)$ yra tolydusis skirstinys su vidurkiu 0, sąlygine dispersija $h_{k,t}$ bei papildomu formos parametrų vektoriumi ϵ_k . Režimai nustatomi taikant Markovo grandinės *Monte Carlo* metodą, kurio parametrai naudojami kaip pradinis taškas galutiniam didžiausio tikėtinumo optimizavimo algoritmui. Naudojant standartizuotas įvertinto modelio liekanas, jų jungtinis skirstinys vertinamas parenkant kopulos funkciją:

$$F(u_1, \dots, u_n) = C(F_1(u_1), \dots, F_n(u_n)). \quad (4)$$

Tinkamas kopulos įvertinimas reikalauja adekvačių F_n skirstinių, kurie leidžia įvertinti teisingą $C(\cdot)$ funkciją. Tyrime nagrinėjamos šios kopulos: eliptinė kopulų šeima (normalioji kopula, T kopula), Archimedo (*Clayton, Gumbel, Frank, Joe, Vine*). Skirtingomis kopulų šeimomis siekiama įvertinti įvairių formų skirstinių uodegų priklausomybes (pagrindinis priklausomybės matas yra *Kendall's tau* koeficientas), o labiausiai duomenims tinkama kopula nau-

dojama sintetinių stebėjimų generavimui ir grąžų simuliacijai vieną dieną į priekį:

$$\hat{R}_{t+1} = F^{-1}\{s_t; \theta_t\} \times \hat{h}_{t+1}, \quad (5)$$

čia $F^{-1}\{\cdot\}$ yra marginaliojo skirstinio atvirkštinė funkcija, s_t yra kopulos generuotos sintetinių reikšmių vektorius, θ_t – marginaliojo skirstinio parametrų vektorius, $\hat{h}_{t+1}$ – prognozuotas volatilumas vieną dieną į priekį. Pagal (5) formulę įvertinus portfelio grąžų skirstinį, yra apskaičiuojamas VPR rodiklis:

$$\widehat{VPR}_\alpha = \hat{F}_{\hat{R}_{t+1}}^{-1}(\alpha), \quad (6)$$

čia $\hat{F}_{\hat{R}_{t+1}}^{-1}(\alpha)$ empirinis α lygmens kvantilis. Galiausiai gautas kvantilis yra lyginamas su tikromis to laikotarpio grąžomis. Jeigu tikroji grąža yra mažesnė už apskaičiuotą rodiklį, tai laikoma modelio pažeidimu. Visi skaičiavimai yra taikomi slenkančiam langui, kurio ilgis yra visada 3846 dienų, o skaičiavimai kartojami 500 kartų kiekvienai naujai dienai. Siekiama, kad pažeidimai statistiškai reikšmingai nesiskirtų nuo rizikos lygmens ir būtų nepriklausomi. VPR modelio adekvatumas vertinamas taikant *Kupiec* ir *Christoffersen* testus. Siekiant įvertinti ir suprasti straipsnyje pasiūlytos metodologijos naudą, atliekamas rezultatų palyginimas su BEKK modeliu gautais VPR įverčiais [13]. Skirtingai nuo aptartos metodologijos, BEKK leidžia modeliuoti portfelį kaip aktyvų sistemą, atsižvelgiančią į inovacijų kovariacinę struktūrą.

3 Rezultatai

Straipsnyje nagrinėjamos grąžos – stacionarios bei turinčios kintantį volatilumą (*Augmented Dickey-Fuller*, Lagranžo daugiklio testai). Nustatyta, kad visų aktyvų grąžas tiksliausiai nusako dviejų režimų MS-GJR-GARCH modeliai¹. Dviejų režimų modelis išskyrė aukštos bei žemos sklaidos periodus (režimus) su atitinkamomis parametrizacijomis. Tinkamas režimo nustatymas yra ypač svarbus prognozuojant VPR, klaida šioje vietoje lemtų rizikos pervertinimą arba nuvertinimą. Potencialiems ateities tyrimams verta būtų ištirti, ar grąžų tarpusavio priklausomybė jautri režimų pokyčiams. Atlikus modelio liekanų analizę nustatyta, kad statistiškai reikšmingai tiksliausias buvo asimetrinis Studento-t (toliau – T) skirstinys (remiantis Kolmogorovo-Smirnovu testu). Alternatyviai, taikyta neparametrinė skirstinių modeliavi-

¹ Tik šiuo atveju iš liekanų buvo pašalinti visi ARCH efektai.

mo metodika, tačiau dėl tiksliai įvertintos parametrinės skirstinio formos neparametriniai metodai reikšmingo indėlio nepridėjo, todėl visiems žemiau aprašytiems rezultatams taikytas asimetrinis T skirstinys.

Kaip etaloninis (angl. *benchmark*) modelis pasirinktas MS–GJR–GARCH (kopulų modeliavimas neatliekamas), t.y. standartizuotoms liekanoms pritaikomas asimetrinis T skirstinys ir simuliuojama grąža vieną dieną į priekį (pagrindiniai rezultatai pateikiami 1 lentelėje). Rezultatai parodė, kad tokio modelio rizika, pirmojo krepšelio indeksų grąžų duomenims, esant 5 % reikšmingumo lygmeniui yra nepakankamai įvertinta – fiksuota 7,2 % pažeidimų. Tokia išvada grindžiama *Kupiec* testu, kuris rodo statistiškai reikšmingą skirtumą nuo pasirinkto lygmens. Viena iš to priežasčių – vienmačiai volatilumo modeliai neatsižvelgia į duomenų tarpusavio priklausomybę.

Papildant analizę daugiamačiu GARCH (BEKK) modeliu pastarasis demonstruoja statistiškai reikšmingai tikslų 5,8 % pažeidimų rezultatą, kurie taip pat yra nepriklausomi. Modelis tiesiogiai skirstinių uodegų nevertina, tačiau indeksų grąžų krepšeliui tokio modelio pakanka tinkamam rizikos vertinimui. Gauti rezultatai yra tikėtini modeliuojant plačiai diversifikuotus portfelius – vienetiniai kelių akcijų šokai atsveriami bendros dinamikos.

Modeliuojant priklausomybę su skirtingomis kopulų šeimomis ir įvertinus VPR pažeidimų procentą, daroma išvada, kad dauguma jų pervertina riziką, o pažeidimų procentas neviršija 1,2 %. Nagrinėjamų kopulų šeimos dažniausiai pasižymi pernelyg centruotomis kairiosiomis uodegomis. Tinkama buvo *Joe* kopula, kuri parodė 4,8 % pažeidimų – tai reikšmingai geresnis rezultatas negu etaloninių modelių. Kartu tai iliustruoja pasiūlytos metodologijos naudą ir pranašumą. Remiantis *Kupiec* ir *Christoffersen* testais daroma išvada, kad rodiklis statistiškai reikšmingai nesiskiria nuo pasirinkto reikšmingumo lygmens, o pažeidimai yra nepriklausomi.

Joe kopulos tinkamumas indikuoja stiprią dešinės (atitinkamai silpną kairiosios) uodegos priklausomybę. Tą vaizduoja *Kendall's tau*, kurio vidutinė reikšmė slenkančio lango metu yra 0,33 (gana silpna priklausomybė) bei 1 pav. esantys *Joe* kopulos kontūro ir empirinio tankio grafikai. Jie nubrėžti prieš tai pasirinkus slenkančio lango vidurinės datos (2024–02–28) standartizuotas S&P500 ir FTSE100 indeksų liekanas, joms pritaikius asimetrinio T skirstinio marginalųjį skirstinį bei transformuojant į reikšmes priklausančias intervalui (0;1). Iš empirinio grafiko pastebima sunkesnė dešinioji uodega, kuri ir būdinga pasirinktai kopulai. Rezultatai leidžia daryti išvadą, kad pasirinkto portfelio diversifikacija lemia atsparumą neigiamiems šokams,

tačiau neapriboja portfelio vertės augimo potencialo. Tikėtina, kad suveikia investavimo į apsaugines (angl. defensive) akcijas mechanizmai, kurie mažina riziką, taip išlaikydami stabilų ir ganėtinai pastovų augimą [12].

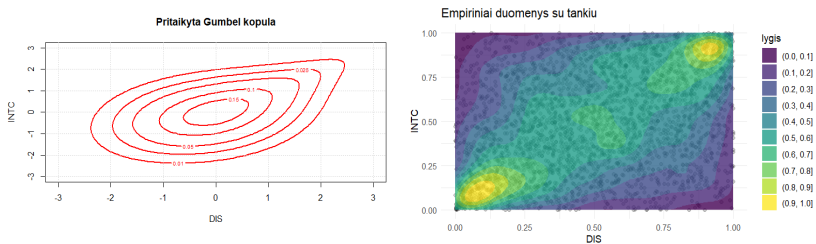
Analizuojant antrąjį (rizikingą) portfelį gaunami šie rezultatai: dviejų rešimų MS–GJR–GARCH modelis yra statistiškai reikšmingai tinkamiausias. Kaip ir indeksų gražų atveju adekvačiausias marginalusis skirstinys liekanoms yra asimetrisinis T. Pakartojus tuos pačius žingsnius tolimesnėje analizėje darytos panašios išvados (pagrindinius rezultatus žr. 1 lentelėje), jog modeliuojant tik volatilumą be priklausomybės struktūros modelis stipriai nuvertina riziką, o mažiau diversifikuoto krepšelio atveju VPR pažeidimo procentas padidėja iki 8,2 %. Priešingai nei indeksų atveju, BEKK riziką irgi nuvertina. Tikėtina, kad nagrinėjamų akcijų priklausomybės struktūra yra sudėtingesnė, todėl BEKK specifikacijos neužtenka. Darant eksperimentą su skirtingomis kopulomis, pastebėta, kad *Joe* kopula pažeidimai sudaro 6 %, tačiau tai pagal *Kupiec* testą, statistiškai reikšmingai nesiskiria nuo nagrinėjamo lygmens. Pastebėtina, kad visais atvejais pažeidimų procentas yra didesnis nei indeksų gražų atveju, o toks padidėjimas lemia modelių tinkamumą (*Kupiec*, *Christoffersen* testai). Visgi tiksliausią rizikos vertinimą pademonstravo *Gumbel* kopula (su vidutiniu *Kendall's tau* 0,28), modeliuojanti dešinės uodegos priklausomybę, su 4,7 % pažeidimų, kurie yra statistiškai reikšmingai nepriklausomi. Šios kopulos tinkamumą iliustruoja 2 pav. apmokytos *Gumbel* kopulos kontūro bei empirinio tankio grafikai, kurie buvo nubrėžti analogiškai kaip ir 1 pav. atveju. Parinktos *Gumbel* kopulos struktūra leidžia daryti išvadą, kad teigiamos modeliuojamo portfelio naujienos yra stipriai priklausomos, greičiausiai lemiamos ekonominės bei vartojimo aplinkos augimo. Neigiamos naujienos yra susijusios silpniau, tikėtina, nulemtos konkrečių įmonės sprendimų ar verslo plėtros nesėkmių. Tai rodo tam tikrą lygio diversifikaciją, tačiau optimaliam rizikos valdymui rekomenduotina akcijų krepšelių plėsti, nagrinėjant daugiau nei 3 akcijas.

Abiejų krepšelių rezultatai rodo, kad vienos kopulos vertinimas visiems duomenims greičiausiai yra mažiau efektyvus, nes esant skirtingiems volatilumo laikotarpiams gali būti naudingos vis kitokios kopulų savybės, kitaip tariant – būtų naudingos dinaminės kopulos. Nors slenkantis langas leidžia tam tikrą dinamiką, reikia atkreipti dėmesį, kad šiuo atveju turima omenyje galimybė keistis kopulos modeliui priklausomai nuo rinkos elgesio. Kopulų parinkimo lankstumo potencialų pranašumą akcentavo ir [5, 8, 11] autorių straipsniai. Laike kintančių kopulų poreikį galima būtų grįsti tuo, kad pasi-

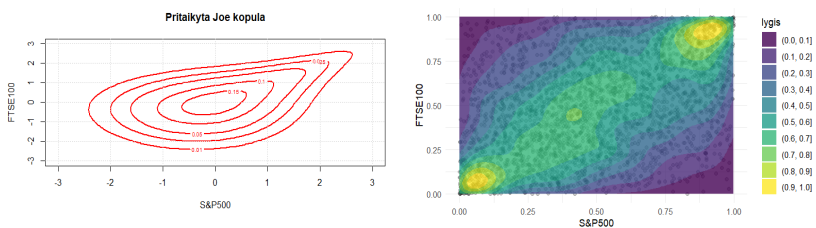
rinktas slenkantis langas turėjo labiau volatilių laikotarpių (COVID-19, karo Ukrainoje pradžia), nei nagrinėtas testuojamas periodas. Nors šiuos periodus siekiame atskirti režimais, verta akcentuoti ir galimą laikiną priklausomybių formos pokytį. Šios rizikos pervertinimas mažiau pastebimas labiau volatiliame akcijų gražų krepšelyje greičiausiai dėl jo didesnės rizikos. Be to, ARCH efektų nebuvimas standartizuotose liekanose bei jų statistiškai reikšmingas tinkamumas asimetriniam T skirstiniui patvirtina [5] straipsnio išvadas, kad neretai teisingos kopulos parinkimas yra svarbesnis už volatilumo modelio parinktį. Tam, kad modelis pasiektų norimą tikslumą būtina atrasti tinkamą sąryšį, kuris paaiškintų priklausomumo struktūrą.

1 lentelė. Pagrindinių modelių rezultatų suvestinė

Modelis	Indeksų gražų krepšelis		Akcijų gražų krepšelis	
	Pažeidimai	Tinkamumas (Kupiec, Christoffersen)	Pažeidimai	Tinkamumas (Kupiec, Christoffersen)
MS-GJR-GARCH + normalioji kop.	0,6 %	Rizika pervertinama	3,7 %	Modelis tinkamas
MS-GJR-GARCH + Studento-t kop.	0,6 %	Rizika pervertinama	3,7 %	Modelis tinkamas
MS-GJR-GARCH + Clayton kop.	0,6 %	Rizika pervertinama	3,3 %	Modelis tinkamas
MS-GJR-GARCH + Gumbel kop.	1,2 %	Rizika pervertinama	4,7 %	Modelis tinkamas (tiksliausias)
MS-GJR-GARCH + Frank kop.	0,8 %	Rizika pervertinama	3,9 %	Modelis tinkamas
MS-GJR-GARCH + Joe kop.	4,8 %	Modelis tinkamas (tiksliausias)	6,0 %	Modelis tinkamas
MS-GJR-GARCH + Vine kopulos	0,6 %	Rizika pervertinama	3,7 %	Modelis tinkamas
MS-GJR-GARCH	7,2 %	Rizika nuvertinama	8,2 %	Rizika nuvertinama
BEKK	5,8 %	Modelis tinkamas	7,4 %	Rizika nuvertinama



1 pav. Gumbel kopulos kontūro ir empirinis tankio grafikai pasirinktiems indeksams 2024 m. vasario 28 dienai.



2 pav. Joe kopulos kontūro ir empirinis tankio grafikai pasirinktiems indeksams 2024 m. vasario 28 dienai.

4 Išvados

Atlikus vertės pokyčio rizikos analizę dviems skirtingai volatiliems krepšeliams, daroma išvada, kad pasiūlytas MS-GJR-GARCH bei kopulų metodikos apjungimas leidžia reikšmingai pagerinti VPR modeliavimo tikslumą lyginant su priklausomybės struktūros nemodeliuojančiais vienmačiu MS-GJR-GARCH bei daugiamačiu BEKK modeliais. Kopulų vertinimas leidžia lanksčiai modeliuoti aktyvų tarpusavio priklausomybės formą. Tinkamai išskirti aukštos bei mažos grąžų sklaidos režimai, kartu su tinkamai nustatyta priklausomybe, užtikrina ne tik tikslų rizikos valdymą, bet ir leidžia suprasti bei paaiškinti nagrinėjamo portfelio struktūrą. Tačiau esant pakankamai dideliai imčiai vienos kopulos pritaikymas gali būti nepakankamas. Nors volatilitumo modelis bei marginalusis duomenų pasiskirstymas gali rodyti gerą prisitaikymą prie duomenų, rinkoje įvykę stipresni sukrėtimai gali reikalausti kitokios priklausomumo struktūros. Papildžius tyrimo metodiką įtraukiant dinaminį kopulos vertinimą, stebimi struktūros pokyčiai galėtų būti siejami su pasauliniais įvykiais. Be to, priklausomai nuo portfelio struktūros, natū-

ralu tikėtis, kad viena kopulos šeima gali būti pernelyg ribojanti – skirtingos aktyvų poros gali turėti skirtingas priklausomybės. Todėl kitas natūralus metodikos plėtinys – įtraukti *Vine* kopulų modeliavimą siekiant maksimalaus lankstumo.

Literatūra

- [1] Investing Basics: Risk. Financial Industry Regulatory Authority (FINRA): <https://www.finra.org/investors/investing/investing-basics/risk>. Žiūrėta: 2025 03 25.
- [2] Bank of International Settlements (BIS), History of the Basel Committee: <https://www.bis.org/bcbs/history.htm>. Žiūrėta: 2025 03 25.
- [3] Holton, G. A. (2013). Value-at-Risk: Theory and Practice, Second Edition, published online at <https://www.value-at-risk.net>. Žiūrėta: 2025 03 25.
- [4] Gau, Y., Tang, W. (2004). Forecasting value-at-risk using the markov-switching arch model. *Econometric Society 2004 Far Eastern Meetings*, 715.
- [5] Fülle, M. J., Herwartz, H. (2024). Predicting tail risks by a Markov switching MGARCH model with varying copula regimes. *Journal of Forecasting*, 43(6), 2163–2186.
- [6] Byun, K., Song, S. (2021). Value at Risk of portfolios using copulas. *CSAM* 2021, 28, 59–79.
- [7] Huang, J., Lee, K., Liang, H., Lin, W. (2009). Estimating value at risk of portfolio by conditional copula–GARCH method. *Mathematics and Economics*, 45(3), 315–324.
- [8] Sampid, M. G., Hasim, H. M., Dai, H. (2018) Refining value-at-risk estimates using a Bayesian Markov-switching GJR–GARCH copula–EVT model. *PLoS ONE*, 13(6).
- [9] Bob, N.K. (2013). Value at risk estimation A GARCH–EVT–copula approach. *Stockholms universitet, Matematiska institutionen*, 1–41.
- [10] Nugroho, D. B., Kurniawati, D., Panjaitan, L. P., Kholil, Z., Susanto, B., Sasongko, L. R. (2019). Empirical performance of GARCH, GARCH–M, GJR–GARCH and log–GARCH models for returns volatility. *J. Phys.: Conf. Ser.* 1307 012003.
- [11] Berger T. (2013), Forecasting value-at-risk using time varying copulas and EVT return distributions. *International Economics*, 133, 93–106.
- [12] Bajaj Finance, Defensive Stocks: <https://www.bajajfinserv.in/defensive-stocks>. Žiūrėta: 2025 03 25.
- [13] Fülle M. J., Lange A., Hafner C. M., Herwartz H. (2024). BEKKs: An R Package for Estimation of Conditional Volatility of Multivariate Time Series. *Journal of Statistical Software*, 111(4), 1–34.