# APIE MATEMATINĮ MĄSTYMĄ

**Pranešimas, skaitytas Imperatoriškojo Vilniaus universiteto mokslinėje sesijoje 1818 m. balandžio 15 d.**

Janas Sniadeckis

Savo *Algebroje*[1] pirmiausia siekiau paaiškinti, kas yra matematinis mąstymas, ir mokėjau ten įrodyti bei išaiškinti kelias sudėtingas, bet svarbias logines taisykles. Šis mokslas, beveik niekieno šiuo metodu nepalytėtas, yra nepaprastai svarbus, kad jaunuomenė matematikoje nesirengtų būti mechaniškais skaičiuotojais, kad turėtų skaidrią to, ką daro, sampratą ir kad svajoms, į kurias jaunos galvos paprastai linkusios, nepalenkus mąstymo. Taigi nebus nenaudinga čia pridėti naujus įspėjimus, kuriuos man pasiūlė patyrimas ir matematikos mokslų apmąstymas.

Tas, kurį vargina 24 laipsniai pagal Réaumuro skalę[2], tai suvokia ryškiau negu šį kentėjimą įsivaizduodamas mąstyme. Tad Hume'as[*] gerai pasakė, kad jusliniai įspūdžiai yra gyvesni ir ryškesni už vaizdinius, kurie juos mums primena bei eksponuoja. Jei iš šių vaizdinių atsiranda mūsų proto kiti vaizdiniai, tai tie kiti yra mažiau ryškūs, tad kiekviena abstrakti ir bendroji idėja mūsų galvoje yra netekusi to aiškumo bei ryškumo, kuris būdingas jutimams ir net būdingas pirmosioms idėjoms, iš kurių kilo tos bendrosios. Vadinasi, minties užtamsinimas auga nepriklausomai nuo jos bendrumo. Ši tiesa patvirtina mano požiūrį į metafiziką, kad kuo toliau ji eina, tuo labiau mus veda į neaiškumus ir klaidas. Tad ji yra žmogaus protui pavojingiausias mokslas.

Tačiau jei bendrosioms idėjoms suteiksime materialų apvalkalą jai būdinga kalba, krintančia į akis ir besiskiriančia nuo įprastos kalbos, ir ji būtų patikima tų idėjų išraiška bei ženklas, tai tas bendrąsias idėjas padarytume aiškias ir matomas, o tuo giliausią proto veikseną performuotume į jutimą. Jei dar visuose keliuose, kuriuos mūsų protas gali pereiti tas idėjas apmąstydamas, įtvirtinsime patikimas, jokiam suklydimui bei netikrumui nepavaldžias taisykles, tai, eidamas šiuo keliu, mūsų protas būtinai pereis nuo vienos tiesos prie kitos. Šiame tikrumo kelyje jam gali pasitaikyti užtvarų ir sunkumų, tačiau tai negali nukreipti nuo tiesos. Tad štai koks yra skaidrus ir tikras matematinio skaičiavimo vaizdas: patikima idėjos

[1] Visas pavadinimas: *Algebrinio skaičiavimo teorija, taikoma kreivosioms linijoms (Rachunku algebraicznego teorya zastosowana do linii krzywych, Kraków,* 1783). Tai aukštosios algebros ir analizinės geometrijos pagrindų vadovėlis.

[2] Tai lygu 30° C. 1°R = 25° C.

[*] An inquiry concerning human understanding. London, 1777.

išraiška yra algebrinė formulė arba lygtis*, šių idėjų žengimo į priekį ir jų nagrinėjimo būdai yra skaičiavimo veiksmai, aprašomi neabejotinomis ir tiksliai įrodytomis taisyklėmis. Šis vaizdas visiškai skirtingas nuo Condillaco, kuris silpnai argumentuoja, jog visas mąstymas yra jutimas, sampratos. Tokio teiginio aš nepripažįstu, nes jis gali būti arba klaidingas, arba bent būtų labai sunku jį nuodugniai įrodyti. Tačiau niekas negali abejoti, kad daiktų jutimas yra gyvesnis ir ryškesnis negu jų vaizdinys, todėl norint savaime neaiškias idėjas padaryti aiškias, reikia jas palenkti jutimui. Šis palenkimas yra ne prigimties darbas, kaip tvirtina Condillacas, nes prigimtis mus nemoko algebros, bet jis yra mokėjimo kūrinys ir iš tikrųjų nuostabus žmogaus išradimas.

Iš to kyla ši taisyklė: kadangi metafizinis mąstymas dėl savo pobūdžio yra tamsus ir pavojingas, kadangi šis mąstymas remiasi tik vaidenimusi ir suklydimams pavaldaus proto tam tikra apyvarta, o matematikoje vien tik skaičiavimas mus apsaugo nuo vaidenimosi ir klaidų, tiksliomis operacijų taisyklėmis dėmesį laikydamas tikrumo varžtuose, – tai matematikos moksluose *gali būti vadinama matematiniu mąstymu tik tai, kas paaiškinama, išvedama ir įrodoma skaičiavimu*. Elementarioje geometrijoje ir senovės geometrų, apie kuriuos bus paskui kalbama, kūriniuose vartoti geometriniai brėžiniai čia nėra joks priekaištas, nes visa tai paprastai ir aiškiai išreiškiama skaičiavimu. Taigi kas matematikos mokslus apmąsto pasitelkęs metafiziką, tas iškrypsta iš nuodugnaus mąstymo tikrojo kelio ir dažniau kliedi negu supranta. Tai būdas protą iškreipti, o ne tobulinti.

Skaičiavime turima omenyje trys dalykai. Pirma, kalba ir jos apraiškos; antra, keliai, kuriuos protas išvaikščioja tirdamas kiekybinius kitimus; trečia, pamatinė tiesa, kuri jį šiais keliais veda. Visa tai apsvarstykime.

## I

Tai, kas vadinama kiekybe, šioje kalboje reiškiama kurio nors alfabeto raidėmis, kiekybės įvairios lygybės ir santykiai reiškiami formulėmis (*formula*), jų tarpusavio ryšiai reiškiami lygtimis (*aequatio*). Čia tuojau pat pasirodo trys svarbiausi šios kalbos požymiai. *Bendrumas*, kuriuo turima omenyje ne daugiau, o tik tas objektų požymis, kad jie gali didėti arba mažėti, – jis apima plačią pažinimo sritį ir vos ne visą geometrijos viešpatiją, nes kur yra erdvė (*spatium*), kur yra kūnai ir jų judėjimas, ten yra skaičiai ir kiekybės, o kur kiekybės, ten pasekamos bei įžvelgiamos jų visuotinės ir neatskiriamos savybės. Čia lengva suprasti, kiek toli gali plytėti šios kalbos vartojimas. Antras gerbtinas šios kalbos požymis yra koncentracija, kitaip sakant, *glaustumas* – joje nėra nieko, kas tiksliai nepriklauso daiktams ir mintims. Plepumas arba įmaišymas bereikalingų žodžių įprastose kalbose yra mąstymo neaiškumo motina ir kliūtis. Skaičiavimo kalba nepakenčia atliekamo ir bereikalingo, tai skaidri ir griežta tikslaus proto kalba, joje visos idėjos koncentruotos ir suartintos, tuo palengvinant jų palyginimą ir susiejimą. Trečias šio skaičiavimo neįkainojamas požymis yra atminties *apsauga* arba palengvinimas. Kas praėjo visas delikataus mąstymo eiles, tas iš to padarytą išvadą gali simboliškai bei tiksliai išreikšti ir pakeisti materialia forma, apimant visas į tą išvadą atvedusias idėjas; disponuojant šia simboline išraiška, jam jau nereikia akylai žiūrėti tų visų idėjų toliau žengiant į priekį. Atminties palengvinimas yra parama protui, kuriam pulkas idėjų yra kliuvinys jas susiejant ir toliau išskleidžiant. Šia paslauga nedisponuojame įprastoje kalbo-

* Čia algebra suprantu visus matematikos mokslus, vartojančius raides.

je, matome tą didelį jos netinkamumą, kad joje idėjų subtilių atspalvių ir skirtybių dažnai neįmanoma lengvai pastebėti, o visą dalyko reikšmę galima iškreipti ir nuvesti į klaidingą išvadą, – to negali būti gerai suprastame ir sukonstruotame skaičiavime, nes kiekvieno samprotavimo simbolinei išraiškai neįmanoma suteikti klaidingos reikšmės.

Bet čia tuojau pat pasirodo svarbi ir esminė sąlyga – šią kalbą reikia gerai suprasti ir mokėti ją gerai skaityti, o tai didžiausias sunkumas, kurio pradedantieji paprastai nesuvokia ir negali jausti. Tai įžvalgumo, gilaus apmąstymo ir ilgo lavinimo vaisius. Tai tikrojo analitinio genijaus viešojo pasirodymo sritis. Tiek kiekvienoje kalboje, tiek šioje pirmoji taisyklė turi būti: *stengtis aiškiai suprasti ir aprėpti kiekvienos išraiškos reikšmę visa jos sritimi.* Šios srities išmokti negalima, ji sužinoma pereinant įvairius šio skaičiavimo reginius, rūšis ir taikymus, o tai įgyjama tik ilgu mokymusi, apmąstymu ir lavinimusi. Įžymiausi žmonės gali klysti skaitydami šią kalbą. Jei kas arba perdėjo skaičiavimu atrastos tiesos reikšmę, arba jos nepasiekė, tai tas rodo, kad blogai perskaitė savo skaičiavimo rezultatus. Iš to ir atsitinka, kad kai vieni geometrai kurią nors užduotį laiko pasibaigusia, kiti jiems įrodo, kad ji nėra tokia.

Kadangi šiame skaičiavime vartojami ženklai yra bendri, apima visa tai, kas tik gali būti to bendrumo srityje ir kas iš jo išvedama, tai jie apima ne tik tai, kas yra, bet ir tai, kas gali arba negali būti. Pavyzdžiui, norime išspręsti kurią nors problemą, arba kurią nors tiesą įrodyti skaičiavimu; tos problemos sąlygos, arba tos tiesos reikšmė, yra joms būdingos, taigi specialios. Jas apimdami bendrųjų ženklų skaičiavimu, gauname ne tik tai, ką mąstėme, bet ir tai, ko nemąstėme, t. y. gauname atsakymą ne tik į savo klausimą, bet ir į visus klausimus, priklausančius nuo kiekybės to paties santykio ir kitimų. Gauname dar ir tai, kas tokiuose kiekybės santykiuose bei kitimuose yra įmanoma ir kas neįmanoma, nes visa tai aprėpia ženklų bendrumas. Iš to lengva suprasti, kodėl viena tiesa mus veda į įrodymą arba vienas klausimas veda į skirtingų laipsnių, kurių pradmenys gali būti ir tikri, ir pramanyti, suvienodinimą: pirmieji parodo tai, kas įmanoma, antrieji parodo tai, kas neįmanoma. Tikruose pradmenyse taip pat gali būti atsakymai, priklausantys mūsų klausimui, o kiti visai jau nepriklausantys, ir reikia proto didelio įžvalgumo, didelio įgudimo skaičiavimuose bei jų pažinimo, kad tai, kas priklauso mūsų klausimui, atskyrus nuo to, kas jam svetima. Net pasakysime tiesą: šis skaitymas visa savo apimtimi iki šiol nesuvoktas, nes įžymiausi geometrai ne visada gali perskaityti ir atsakyti į tuos klausimus, kurie jų atvejui nepriklauso ir vis dėlto yra skaičiavime, ir savo ruožtu į tuos, kurie neįmanomi.

Skaitymo sunkumas dar kyla iš abejojimo teigiamais ir neigiamais ženklais dėl to, kad šie ženklai turi trejopą reikšmę ir dažnai nežinome, kuriais atvejais kurios laikytis. Pirma, jie išreiškia operaciją, ši reikšmė yra bendriausia; antra, išreiškia vienų kiekybių įvairius būvius ir padėtis kitų atžvilgiu; trečia, išreiškia kiekybės didėjimo arba mažėjimo ribų peržengimą, kur teigiami ženklai virsta neigiamais ir neigiami virsta teigiamais. Carnot[3] parašė puikų ir platų veikalą apie šių ženklų antrąją reikšmę[*]. Taip pat būtų galima daug parašyti apie trečiąją reikšmę. Ši vienintelė skaičiavimo kalboje dviprasmybė, kurios nebuvo galima išvengti, sukelia nemaža painiavos ir keblumų skaitant.

Skaičiavimo kalboje kartais iš pažiūros maži pastebėjimai gali vesti į naują mokslą arba į

[3] *Carnot Nazare Nicolas Marquerite* (1753–1823), prancūzų matematikas, valstybės veikėjas. Tyrė matematinės analizės metodus, projektyvinės geometrijos pradininkas.

[*] Géometrie de Position. Paris, 1804.

didelius jau žinomo mokslo atradimus. Kokias neįkainojamas paslaugas matematikai padarė Descartes, algebroje įvedęs sveikuosius rodiklius, ir Wallis[4], įvedęs trupmeninius rodiklius, nors tai iš pradžių atrodė tik rašymo sutrumpinimas! Visa logaritmų teorija, paprasti jų skaičiavimo metodai, iki tol painios šaknies traukimo taisyklės, pateiktos tąja pačia formule, kurią pakėlė laipsniu Newtonas, sunkiausių klausimų išsprendimas giliausiose matematikos dalyse pasitelkus šiuos ženklus ir t. t. – tai iš pažiūros tokio mažo pastebėjimo gėrybės. Menamųjų pradmenų ženklas, iš pažiūros tiek mažai reiškiantis, Eulerio pavartotas tapo matematikos moksluose epochiniu. Jo šiuo ženklu išreikšta trigonometrinės funkcijos ir lanko sąsaja yra gražiausias XVIII a. atradimas. Norint tai suprasti, pakanka paskaityti didžiuosius Lagrange'o[5] atradimus, į kuriuos jį atvedė Eulerio formulės. Įprastoje kalboje talento įvestas žodis gali būti naujos galios šaltinis, to matematikos kalboje jis gali tapti dideliu mokslo palengvinimu arba nauju meistriškumu pasiekiant tiesą ir svarbių atradimų šaltiniu, tačiau ir šis, ir panašūs pastebėjimai, ir iš kalbos prigimties išgauti terminai yra nepaprastų protų ir talentų įkvėpimo padarinys. Pažinti šių ženklų įtaką ir vertę nėra lengva, tačiau gerai skaičiavimo kalbos sampratai to neišvengiamai reikia. Taigi skaičiavimo skaitymas yra ilgas ir sunkus mokslas, nes reikalauja visų jo atšakų, mokėjimų ir metodų žinojimo, didelio patyrimo ir neeilinio įžvalgumo. Čia turime mokytis kuklumo, nes kuo daugiau šiame moksle pažengiama į priekį, tuo labiau atsiskleidžia sunkumais užgriozdinta jo bedugnė gelmė.

## II

Keliai, kuriuos ši kalba nueina išreikšdama kiekybės kitimus, yra įvairių rūšių operacijos, arba veiksmai, tai vadinama *algoritmu*. Galima sakyti, kad grynosios matematikos šakos skiriasi algoritmu. Aritmetikos veiksmai ir lygčių sprendimas yra algebros algoritmas, logaritmams ir trigonometrinėms linijoms lankų atžvilgiu būdinga nuosavas algoritmas. Diferenciacija ir integracija yra gilesnio, arba variacinio, skaičiavimo algoritmas, iš kurio Lagrange'as išveda diferencialinį algoritmą. Tai klaidinga nuomonė esą diferencialinio skaičiavimo pamatinėse tiesose būta kažko abejotino ir netikro. Kadangi šis skaičiavimas išvedamas iš įvairių pagrindų, tai visas ginčas būna dėl to, kurie pagrindai pasižymi didesniu paprastumu ir akivaizdumu, ar negalima įžvelgti kitų, lygiai tikslių ir neabejotinų pagrindų, kurie būtų dar paprastesni ir akivaizdesni, ar šio skaičiavimo nebūtų galima išvesti iš šiuolaikinės analizės, Maclaurin'o[6] ir d'Alambert'o pavyzdžiu nesikreipiant į senovės geometrijos pagrindus?

Kiekviename algoritme veiksmų taisyklės yra patikimos ir tiksliai įrodytos, jų galima gerai išmokti, o dideliu įgudimu ir lavinimu lengvai jas taikyti. Naudodamas skaičiavimą kuriai nors problemai išspręsti arba kokiai nors tiesai įrodyti, tikras geometras žengia tam tikrų idėjų ir samprotavimų, kuriuos retai aiškinasi, eile. Kas skaičiavime šios idėjų eilės nemato ir

[4] *Wallis John* (1616–1703), anglų matematikas, Oksfordo universiteto profesorius. Išplėtojo kreivių ilgių ir plotų skaičiavimo metodus, tuo sukurdamas integralinio skaičiavimo pradus.

[5] *de Lagrange Joseph Luis* (1736–1813), prancūzų matematikas ir mechanikos teoretikas, Paryžiaus aukštosios normalinės mokyklos profesorius. Savamokslis. Praturtino matematiką ir teorinę mechaniką įžymiais atradimais – Lagrange'o eilutė, funkcija, kintamieji, lygtys ir kt.

[6] *Maclaurin Colin* (1698–1746), škotų matematikas, Edinburgo universiteto profesorius. Sukūrė darbų iš aukštesniųjų eilių kreivių, ekstremumų ir eilučių teorijų, baigtinių skirtumų skaičiavimo ir projektyvinės geometrijos.

neprieina, tas yra paprastas mechaniškai dirbantis sąskaitininkas. Jis pasieks reikalingų rezultatų, tačiau nesupras, taip sakant, mokslo dvasios ir autoriaus minties. Visuotinis šiuolaikinei analizei išsakomas priekaištas tas, kad ji, daug besidarbuodama skaičiavime, nepakankamai lavina ir tobulina mąstymą. Tačiau šis priekaištas tinka ne mokslui, bet jo netvarkingam įgijimui ir taikymui. Anksčiau sakyta, kad šį skaičiavimą skaityti sunku ir reikia didelio apgalvojimo: kas jame nesilavina, kas jame nesidarbuoja ir jo neapmąsto, o visą energingumą skiria atlikti veiksmus, tai argi kalba kalta, kad jos neišmoko gerai skaityti? O kas gerai jos neperskaito, tas joje glūdinčių idėjų nei pastebės, nei pasieks. Reikia turėti iš anksto įpratintą ir gerai išlavintą galvą tolydžiam ir tiksliam geometriniam įžvalgumui, kad jį skaičiavimuose ne pražudžius, bet visuomet kartu su juo žengus visuose darbuose. Tokio įžvalgumo stoka yra didelė kliūtis naudingai skaičiavime progresuoti. Šio blogio pradžia yra dažniausiai blogai jaunimui aiškinama elementarioji geometrija, kurioje kai kurie autoriai, neapgalvoję nei mokslo tikslo, nei jaunų protų poreikių, atsitraukia nuo Euklido metodo, kuris vienintelis įpratina protą tikslios geometrinės įžvalgos, kaip išdėstyta Euklido veikalo, išversto Józefo Czecho, pratarmėje.

Kas geometrijoje įpratinta galva apmąsto ir atlieka skaičiavimus, kas paties savęs klausia, kokia yra kiekvieno veiksmo ir kiekvieno metodo priežastis, kas išsamiai pastebi visus skaičiavimo pavidalus ir pakitimus, to apmąstymas nė žingsnio neatitrauks ir tik toks gerai pajėgs perskaityti tai, kas jam teks. Tiesa, esama plačių ir daug darbo reikalaujančių skaičiavimų, į kuriuos mus atvedęs protavimas juos atliekant atrodo esąs nuvargęs ir ilsisi. Tačiau be šio atkaklaus ir tikrai herojiško darbo liktume be daugelio didžių tiesų, kurių kitaip negalima nei atskleisti, nei įrodyti. Jei tiesa priklauso nuo abstrakčių ir sudėtingų idėjų sąryšio, tai be šio darbo jos neatskleidžiamos. Todėl didelis skaičius svarbiausių matematikoje atradimų yra genijaus atkaklaus darbo vaisius. Tačiau šiuose plačiuose ir mąstymo paskirtuose skaičiavimuose protas nėra be darbo. Išsamus kiekybės tvarkos ir plėtojimosi stebėjimas protui teikia įvairias perspektyvas ir dažnai svarbias sužinant tiesą: pasiūlo metodus darbams sutrumpinti, juos komplektuoti arba išmontuoti, o visa tai lavina pastabumą, tobulina mokėjimą skaityti ir protui suteikia tam tikrą taktą numatant skaičiavimo rezultatus.

## III

Kiekvienoje matematikos mokslų šakoje ir ją taikant yra kokia nors pamatinė tiesa, kuri visame skaičiavime mums vadovauja ir veda. Algebroje nežinomas kiekybes laikome žinomomis, pirmąsias susiejame su antrosiomis, kad įprasta kalba pateiktą klausimą išreikštume skaičiavimo kalba. Langrange'as savo veikale *Funkcijų teorija* viską kreipia į tą pradą, kad kiekvienos funkcijos išplėtojimas veda į naujas funkcijas, kylančias iš pirmosios. Mechanikoje potencialių greičių (*vitesses virtuelles*) principas jam yra pamatinė mokslo tiesa. D'Alembert'as savo dinamikoje jėgas tiria ir skirsto į tas, kurios išnyko, ir tas, kurios išliko. Tokių pamatinių tiesų paieškos visose grynosios matematikos šakose, jų įsisavinimas ir susiejimas į vieną tiesą, viešpataujančią visai šio mokslo karalystei, yra, mano nuomone, tai, kas vadinama *matematikos metafizika*, t. y. plačiu ir bendruoju viso mokslo suvokimu. Bet į tai neturi patekti nieko, ko nėra skaičiavime ir ko nebūtų galima juo nuodugniai pagrįsti. Į tuos tikslius reginius įmaišyti savo pačių pasivaidenimus arba tariamos filosofinės metafizikos vargingas nutartis (*des principes vagues*) – tai falsifikuoti mokslą ir šią puošnią tiesos bei aiškumo sostinę paversti tamsos ir fantazijos duobe. Skaitant kiekvieną autorių, svarbiausias dalykas yra skaidriai ir nuodugniai suprasti jo pamatinę tiesą, jos santykį su problemų sąlygomis arba su viso mokslo projektais, pasekti jo mąstyseną vairuojančius kelius ir veikseną, įveikti jam pasitaikiusius kliuvinius bei sunkumus. Visa tai iš skaitytojo reikalauja giliausio dėmesingumo ir nenutrūkstamo protavimo. Kas neina su juo išvien, tas tėra mechaniškas sąskaitininkas ir, atlikdamas veiksmus, mokslo nesupranta. Esama tokių nesuprantamų ir bejausmių matematikos kūrinių autorių, kurie, savo mokslo pamatu paėmę arba savo pačių atrastą formulę, arba perimtą iš mažai žinomo autoriaus, praleidžia jos įrodymą ir išaiškinimą. Tuo jie arba visą kūrinį daugeliui skaitytojų padaro nenaudingą, arba skaitantysis labiau pavargsta nuo formulių pamato įrodymo paieškos negu viso mokslo išdėstymo. Ne taip elgėsi didysis Euleris, kuris kiekviename savo traktate kartais kuo plačiausiai pamatinę tiesą rūpestingiausiai įrodo ir aiškina.

Kadangi matematikoje viskas susiję ir vienas kitą palaiko, tai pamatinė skaičiavimo tiesa gali būti artimesnė ar tolesnė grandis tos tiesos, kurią siekiame atrasti arba įrodyti. Pirmuoju atveju skaičiavimas bus paprastas ir trumpas, antruoju – ilgesnis ir sudėtingesnis, nes reikia pereiti didesnę eilę tiesų, vedančių į tą, kurios ieškome. Dažniausiai neseniai atrasta tiesa yra daug darbo reikalaujančio skaičiavimo rezultatas, ji paskui įrodoma ir išgaunama paprastesniu ir lengvesniu skaičiavimu – tai mokslo ištobulėjimo arba pradmens, kuris tai tiesai artimesnis ir būdingesnis, padarinys. Yra dar kita priežastis, kad tai, kas gali būti lengvai arba greitai atrasta ar įrodyta, mus veda į ilgus bei daug darbo reikalaujančius skaičiavimus, ir tai yra netinkamo algoritmo vartojimas. Pavyzdžiui, kreivųjų linijų liestinių išvedimas ir jų palyginimas su apskritimu gali mums kai kurių linijų atvejais pavykti ilgu algebriniu skaičiavimu – juk šis metodas, pavartojus diferencialinį skaičiavimą, atrodo esąs paprastas bei lengvas ir tinka visoms be išimties linijoms. Tad matematiniame mąstyme nepaprastai svarbu pažinti ir parinkti deramą algoritmą duotajai problemai.

Kartais skaičiuodami susiduriame su stebinančiais ir nepaprastais atvejais, kurių neįmanoma suderinti su pamatinėmis tiesomis ir mūsų naudojamais metodais. Pavyzdžiui, algebroje trečiojo laipsnio lygtį su vien tik realiomis šaknimis išsprendus, šios šaknys pasirodo menamuoju pavidalu. Aukštesnės eilės skaičiavimuose diferencijuojant lygtį kartais pakliūvame į jos integravimą, t. y. visiškai veiksenai priešingą atvejį. Toji pati lygtis kartais mus atveda į tiesiąją liniją, o kartais į kreivąją liniją. Visus panašius skaičiavimo atsiradimus surinko Euleris ir Peterburgo Akademijos aktuose išleido paradoksų pavadinimu.

Bet tik Lagrange'as įrodė, kad algebroje pasitaikęs sunkumas kilo iš blogo skaitymo, nes trečiojo laipsnio šaknies ženklui buvo priskiriama tik viena reikšmė, kai šis ženklas turi tris reikšmes ir šiuo ženklu apimamos menamosios išraiškos nėra menamosios. Vėlgi tik tam pačiam Lagrange'ui nustačius ir išvedus bendrąją atskirų sprendinių (*solutiones particuliaires*) teoriją, visi tie paradoksai išnyko, viskas pasirodė esą tikra, vieninga ir susiję. Taigi skaičiavimo, taip sakant, keistenybės mums tokios atrodo tik todėl, kad arba skaičiavimą blogai skaitome, arba dar nežinome kokios nors įžymios tiesos, kuri jas būtinai pašalina. Kuo labiau skaičiavimo meistriškumas didės ir tobulės, kuo daugiau pažengsime į priekį jį apmąstydami ir atlikdami, tuo lengvesnis bei tikslesnis bus jo skaitymas. Visiškai aiškiai galima pasakyti, kad skaičiavimo išaugimas ir tobulumas veda į tikslesnį jo skaitymą. Kartu su kalbos tobulėjimu čia žengia mūsų minčių plėtra ir gilesnė dalyko samprata.

Iš to, ką iki šiol išdėstėme, paaiškėja:

*Pirma.* Matematinis mąstymas grindžiamas mokėjimu skaityti ir vartoti kalbą, mokėjimu patikimai ir sąryšingai išreikšti tiesas bei gerai apmąstytas idėjas, skaičiavimo nulemtos tvarkos, sąryšio ir kilmės matymu.

*Antra.* Sutalpindamas daugybę idėjų ir jas apimdamas tikslia simboline išraiška, skaičiavimas yra intelektinių galių atrama ir atminties apsauga, o kartu didelė parama tas idėjas lyginant ir susiejant. Vertinga gėrybė, kurios neturi jokie kiti mokslai!

*Trečia*. Keliai, kuriuos šis skaičiavimas nueina, yra tikrumo vieškelis, kuriame negalima sutikti nieko abejotino nei klaidingo, kas galėtų protą nukreipti nuo tiesos kelio. Kita didelė gėrybė, skirta vien tik matematikai!

*Ketvirta.* Skaičiuoti be nuolatinio atidumo ir protavimo – tai mokytis ne mokslo, bet jo mechanizmo.

*Penkta*. Atsidėjus ir supratingai sudarytas skaičiavimo mechanizmas protui teikia greitesnį dalyko matymą ir, dažnai jį atliekant, pasiūlo naujus ir lengvesnius kelius bei metodus.

*Šešta.* Skaičiavimo aiškinimui suteikti tai, ko jame neaptinkama, arba jį apsvarstyti pasitelkus metafiziką – tai klastoti mokslą ir protą nuvesti nuo tiesos bei tikrumo kelio.

*Septinta.* Visi skaičiavimo paradoksai ir keistenybės atsiranda iš to, kad arba jį blogai skaitome, arba dar nežinome kažkokios tiesos, dėl kurios nežinojimo jie būtinai kyla.

Iš viso to nesunku suprasti paslaugos, kurią skaičiavimas teikia vadinamiesiems faktais, stebėjimais ir eksperimentais grindžiamiems mokslams, nepajėgiant šiuose moksluose protavimo susieti į vieną nagingą nuolatinio ir nepajudinamo tikrumo grandinę, svarbą: juk kai šie mokslai nepagrįsti skaičiavimu, jie nesiliauja buvę arba paprastos erudicijos rinkiniu, arba, taip sakant, nuolat kintančių teorijų ir nuomonių klampyne.

Šiandien matematikoje samprotaujame pasitelkę raides, o senovės geometrai samprotavo pasitelkę brėžinius ir figūras. Mes objektų pavadinimus, jų lyginimus ir santykius reiškiame specialia, tik jiems būdinga kalba, o senovės žmonės visa tai reiškė įprasta kalba. Mums kiekviena tiesa tampa aiški simboline išraiška ir atminties nekamuoja; o jų prabėgančiais žodžiais išreikšta tiesa buvo reikalinga ir atminties, ir dėmesio, jais ji buvo apsunkinta tuo labiau, kuo ilgesnę tiesų eilę jai tekdavo pereiti. Jiems reikėjo įsiminti visas idėjas, norint jas perteikti kalba, reikėjo įtempti dėmesį, kad jas pritaikytų; mums reikia tik suprasti kalbą, kad tos idėjos taptų aiškios, o pats simbolinių ženklų taikymas teikia idėjų taikymą ir lyginimą be naujo protinio darbo. Brėžiniai ir figūros senovės žmonėms parodė daug iš dalies ir paeiliui įrodytų tiesų, bet jie negalėjo vienu kartu apimti šių tiesų sąryšio ir jo perteikti, nes tai yra kalbos, kurios jie neturėjo, reikalas. Jų protas visada buvo paskendęs daiktuose, o mūsų, kartą simbolių kalba išreiškusių daiktus, visas darbas sutelktas ties kalba.

Iš to lengva suprasti, kad senovės geometrų mokslas, nors nepaprastai svarbus ir vertingas išdėstant tokias paprastas kaip Euklido geometrijoje tiesas, vis dėlto gilesniuose tyrimuose turėjo būti ilgas, sunkus ir painus, o todėl prieinamas labai mažam skaičiui protų. Jis buvo dar labai ribotas, nes, neturint paramos kalboje, viską – tas pačias pateikiančiojo ir susiejančiojo įvairių rūšių bei pavadinimų tiesas – reikėjo išgauti ir išreikalauti įtemptu pastabumu. Tiesa, jų naudotas metodas daugiau ar mažiau įdarbino protą ir vargino pastabumą, bet tyrimuose negalėjo pažengti tiek toli, kiek pažengė šiuolaikinis metodas, kai daugelis tiesų yra pačios kalbos faktas.

Taigi visą senovės mokslo ir šiuolaikinio mokslo skirtybę sudaro kalba, kuri pavadinta *analitine* ir kurios senovės autoriai nežinojo.

Visas kitas skirtybes, kuriomis matematikos kūrinių autoriai išsiskiria, laikau tauškalais ir nieko nereiškiančiomis. Vartojant šią kalbą, yra trys taisyklės. Pirmoji: nežinomus dalykus laikyti žinomais, vienus su kitais lyginti, derinti ir susieti. Šią taisyklę senovės autoriai žinojo, tai galima pamatyti iš jų problemų išsprendimo metodų, ir galima sakyti, kad ją mes iš jų išmokome. Antroji taisyklė: protavimą bei jo rezultatus pateikti bendraisiais ženklais ir juos padaryti matomais sąryšingomis bei trumpomis išraiškomis. Šito senovės autoriai nežinojo. Tiesa, graikai ir romėnai aritmetikoje skaičius žymėjo alfabeto raidėmis, bet šios raidės neturėjo bendrosios reikšmės, kiekvienos reikšmė buvo žymima taip, kaip šiandien žymi arabiškieji skaičiai. Be to, čia reikia bendrųjų ženklų daiktams žymėti ir ženklų veiksmams žymėti – to senovės autoriai nežinojo. Trečioji taisyklė: nežinomą atskirti nuo žinomo ir pirmąjį išreikšti pastaruoju. Tam reikia žinoti bendrųjų ženklų algoritmą, o to senovės autoriai taip pat nežinojo. Paprastais minčių santykių atvejais jie siekė samprotauti, parodydami, kaip žinomuose objektuose glūdi tai, ko ieškome. To pavyzdžius galima skaityti Euklido knygoje *Pradmenys*. Painesniais atvejais jei vartojo konstrukcijas, linijų susikirtimuose ieškodami viso pasiūlymo, apimančio žinomus ir nežinomus dalykus, o tai sudarė labai nuovokią matematikos dalį, tačiau nepaprastai painią ir galėjusią apimti mažai atvejų.

Būdingas šiuolaikinės analizės bruožas yra bendrieji ženklai ir jų algoritmas, senovės autoriams visiškai nežinomi, tad jų tariamoji analizė nebuvo šiuolaikinė analizė. Tačiau gilūs senovės metodo tyrinėjimai galėjo vesti į šiuolaikinį metodą. Tai geriausiai įrodo Fermat[7] paaiškintos Diofanto[8], tyrusio keblias skaičių savybes, aritmetikos šešios knygos. Iš to galima matyti, kaip buvo svarbu senovės metode nustatyti aiškius ir nuodugnius apibrėžimus, kitaip sakant, žodžių ir daiktų apibūdinimus, prieš kuriuos taip nederamai ožiuojasi Condillacas. Vartojant įprastą kalbą reikšti savo subtiliems samprotavimams, reikėjo tiksliai aprašyti šios kalbos žodžių reikšmę ir niekada šios reikšmės neišleisti iš akių. To šiandien analitinėje kalboje mes nesame reikalingi bent taip dažnai.

Vadinasi, įrodydami kokią nors tiesą arba figūrų brėžiniu spręsdami kokią nors problemą, matematikoje veikiame *sintetiniu* metodu. Nors net pavartotume algebros ženklus, bet jei šie ženklai nieko daugiau neatlieka, o tik sutrumpina įprastą kalbą, tai nuo to metodas nesiliauja buvęs sintetinis. O jei įrodant kokią nors tiesą arba sprendžiant kurią nors problemą vartojame raides ir bendruosius ženklus ir iš šių raidžių, iš jų algoritmo apmąstymo išgauname išvadas, tai matematikoje veikiame *analitiniu* metodu. Ir nors tam pavartotume brėžinius bei figūras, bet jei tos figūros daugiau niekam neskirtos, o tik paaiškinti brėžinį arba lengviau prieiti mūsų užduoties išraiškos raidėmis ir paskui visą protavimą atgręžti į kalbą, tai veiksenos metodas nesiliauja buvęs analitinis. Apskritai tariant, šie metodai yra savąja veiksena pasireiškiančio proto du keliai. Ten, kur minčių santykius ir sąsajas protas apmąsto pasitelkęs brėžinį arba apibrėžimą, jis veikia *sintetiškai*; kur juos skaito bendrąja kalba, jos simbolinėmis išraiškomis, savybėmis ir pakei-

[7] *de Fermat Pierre* (1601–1665), prancūzų matematikas, vienas skaičių teorijos kūrėjų. Jo darbai labai paveikė matematinės analizės raidą.

[8] *Diofantas (Diophantos)*, II a. graikų matematikas, gyvenęs Aleksandrijoje. Veikale *Aritmetika* daugiausia nagrinėjo neapibrėžtąsias lygtis, vadinamas diofantinėmis. Jo skaičių teorijos tyrimais rėmėsi naujųjų amžių matematikos įžymybės – P. Fermat, L. Euleris, o XIX a. S. F. Gauss'as.

timais, jis veikia *analitiškai.* Tad matematikoje disponuojame skaidria ir patikima šių dviejų terminų reikšme, kuri daugelyje knygų aiškinama taip painiai, taip įvairiai ir kartais klaidingai. Sakyti, kad analizė yra skaidymas, gali būti teisinga chemijoje ir kituose moksluose, tačiau klaidinga matematikoje, nes analizė ir sudeda, ir išardo. Dažniausiai pradeda sudėčia, o baigia išardymu. Kai nežinomi objektai suplakami su žinomais, kad juos susiejus ir paaiškinus analitine kalba, tada sudedama. Kai nežinomus norima atskirti nuo žinomų, tada tai, kas sudėta, išardoma. Kai iš simbolinės išraiškos daromos išvados, tada daugelio tiesų aibė išskaidoma į pavienes tiesas ir atvejus.

Savo ruožtu sakyti, kad sintezė prasideda bendrosiomis tiesomis, o analizė – pavienėmis, matematikoje taip pat yra didelė klaida. Kiekviena jų nuo žinomų dalykų eina prie nežinomų, nuo paprastų prie painesnių, pradeda tuo, ką mes jau gerai pažinome, taigi vienas ar kitas kelias gali būti skirtas atkūrimui atsižvelgiant į užduotį ir mūsų žinių laipsnį. Savo sintetinėje geometrijoje Euklidas nuo linijų ir kampų eina prie trikampių kaip paprasčiausių figūrų, o nuo jų eina prie keturkampių, paskui prie daugiakampių ir plokštumų, apskritai tariant, nuo paprastų objektų prie sudėtinių ir vis painesnių.

Abiejuose veikimo būduose kurios nors tiesos įrodymas tuo nuodugnesnis, kuo labiau jis išvedamas iš bendriausios tiesos. Užduotis sprendžiant analitiniu keliu, labiausiai laikomės tokio metodo: pateiktą klausimą laikome bendriausio prado atskiru atveju ir jį iš jo išvedame. Pavyzdžiui, tiriant dangaus kūnų judėjimą, visus reiškinius išvedame iš visuotinių traukos dėsnių, o šiuos traukos dėsnius vėlgi laikome bet kokių jėgų, kūną veikiančių bet kokia kryptimi ir pagal bet kokius dėsnius, atskiru atveju. Tad čia analizės eiga – nuo bendrųjų objektų prie atskirų. Bet kai kurį nors gamtos reiškinį apimame skaičiavimu, kartais pradedame nuo to atskiro reiškinio, jį siedami ir derindami arba su kitais reiškiniais, kad atskleistume jų tarpusavio priklausomybę, arba su kuria nors bendrąja tiesa, kad atskleistume šaltinį ir pradą, iš kurio tas reiškinys išplaukia, ir tada nuo atskirų objektų einame prie bendrųjų. Taigi abu šie keliai gali būti skirti abiems veikimo būdams, nes kelio pasirinkimas priklauso ne nuo veikimo būdo, bet nuo mūsų žinių lygio ir turimų priemonių, taip pat nuo to, kas mus lengviau ir greičiau veda į ieškomo objekto atradimą.

Sakoma, kad matematikos mokslams tikrumą ir aiškumą suteikia veikimo būdas (*methodus*), šio veikimo būdo pagrindą sudaro daug matematikoje vartojamų procedūrų, antai tvirtinimas (*theorema*), išvada (*corollarium*), paaiškinimas (*scholion*), pagalbinė tiesa (*lemma*), užduotis (*problema*) ir t. t. Net manyta, kad šių pavadinimų įvedimas į kitus mokslus suteikia jiems matematinį tikslumą. Šis suklydimas ištiko kitur gerbiamą matematikos raštininką Christianą Wolffą, kuris šiuos pavadinimus įvedė į savo filosofinius metafizikos, etikos ir t. t. kūrinius ir juos išdėsto tarsi Euklido metodu. Idėja iš tikrųjų ir beprasmiška, ir juokinga! Juk jei mokslas pats nepajėgia įgyti tikslaus tikrumo, tai jo, žinoma, nesuteiks matematikos terminai. Visas tas iškilmingas matematikos terminų ekipažas Wolffo mokslo negalėjo išgelbėti nuo žlugimo.

Matematikos mokslams tikrumo ir aiškumo suteikia pirmiausia jų tiriamas dalykas, arba objektas, – paprastas, platus ir tobulas savo apibrėžiamąja reikšme; jį suteikia perspektyva, kuria protas šį objektą vertina, nieko daugiau jam nepridėdamas, o tik gebėjimą padidėti arba sumažėti, taigi vertindamas iš šio objekto prigimties kylančius kitimus; jį suteikia apibūdinimai, arba aiškūs, paprasti apibrėžimai, kurių niekas negali paneigti; pagaliau jį suteikia veikimo būdas, kuris grindžiamas ne žodžiais ir vardais, bet patikimu ir neklystamu samprotavimu – arba sintetiniu, kai išvados grindžiamos pamatiniu apibrėžimu ar brėžiniu, arba analitiniu, kai jos grindžiamos bendrąja kalba ir ja negalinčiais mus suvilioti veiksmais. Tiek pirmasis, tiek antrasis samprotavimo būdas yra tikras ir nuodugnus, bet analitinis samprotavimas yra vešlesnis ir toliau siekiantis. Naujos perspektyvos ir nauji atradimai šioje kalboje duoda pradžią naujoms taisyklėms ir naujiems mokslams, dėl to matematikos išaugimas yra didžiulis ir niekada nesibaigiantis. Ji yra vien tik teisingas mokslas, nes yra tikrumo sostinė, nes vienvaldiškai viešpatauja visai žmogiškųjų pažinimų sričiai, nes jos reikalingi beveik visi mokslai, o ji jokio, kaip gerai pasakė Johanas Bernoullis[*][9].

Disponuodami kitų mokslų teikiama nauda, galbūt galėtume jiems suteikti matematinį tikslumą? Tikrai ne. Kitų mokslų objektas yra arba per daug sudėtingas ir painus, arba pakankamai neapibrėžtas ir neaiškus (*vague*), prie visko ir prie nieko aiškiai nederantis, arba priklausantis nuo sutarties, patikimo, nuo žmonių nuomonių ir aistrų, patiriančių tūkstančius įvairumų ir šmirinėjimų. Faktai, stebėjimai ir eksperimentai gali būti solidūs ir tikri, tačiau jų reginys žmogaus prote gali būti klaidingas, ir šis reginys gali kitus faktus keisti arba iškreipti. Reikėtų, kad žmogaus protas tiksliai apimtų ir tai, kas yra, ir tai, kas gali būti, o būti savo išvadomis neįsitikinusio ir savo reginiais įvairiai galinčio suktis bei keistis proto tam tikra atrama yra nepaprastai keblu. Vadinasi, visi kiti mokslų ir mūsų pažinimai, pasiekti proto galiomis, yra arba erudicija, arba tiesų ir prielaidų rinkinys, arba geriausiu atveju artimumas tiesai bei jos tikimybė, tačiau nė vienas nėra niekuo nepajudinamo tikrumo tolydi grandis.

Tad matematinės analizės nėra nė viename moksle, kuriame nėra skaičiavimo kalbos.

Ką tada juose reikš terminas *analizė*, kurį taip dažnai šiandien vartoja knygų autoriai, nepaaiškindami, ką tuo ketina suprasti? Chemijoje kūnai skaidomi į juos sudarančius elementus ir iš jų junginio vėlgi susiklosto ir susidaro iš naujo. Šis skaidymas ir sudėjimas galbūt yra cheminė analizė ir sintezė, bet ne matematinė. Kituose moksluose terminas *analizė* reiškia tam tikrą tiek daiktų, tiek minčių tvarką ir išrikiavimą išdėstant mokslą. Kiekviena duotybė ir kiekviena tiesa laikoma kitos, geriau pažintos tiesos išvada arba iš faktų ir jau gerai suprastų stebėjimų išgauta išvada, ir niekas nepasirodo iki ją sužinant. Matome, kad tai yra tvarkingas nežinomų dalykų išskleidimas arba veikiau besimokančiajam naujų, išvestų iš jam jau žinomų dalykų. Tai būtų galima vadinti *atradimo* metodu, bet tai nėra matematinė analizė, nes šis metodas lygiai naudojamas ir sintezėje, ir analizėje. Taip išdėstyti pavyksta ne visuose moksluose, ypač tuose, kuriuose funkcionuoja imitavimo, sutarties, patikimo bei skonio taisyklės ir kuriuose tiksliai nesamprotaujama.

Toks išdėstymas kai kuriuose moksluose savaip naudingas, bet taip pat savaip netinkamas. Pirma, dažnai mus įtraukia į ilgą ir ištęstą plepėjimą, kuris yra didelė mąstymo ir rašymo yda, netgi kliūtis skaidriai suprasti. Antra, per didelė išsiskleidžiančių idėjų tvarkos priežiūra atitraukiame dėmesį nuo jų sąryšio tikslumo, nuo jų šešėlinių ir subtilių skirtingumų, kurie visą samprotavimą gali padaryti klaidingą. Taigi

[*] Omnes scientiae mathesi indigent, mathesis nulla, sed sola sibi sufficit[10].

[9] *Bernuolli Johann* (1667–1748), Šveicarijos matematikas ir fizikas, Bazelio universiteto profesorius. Pirmasis sistemingai išdėstė diferencialinį ir integralinį skaičiavimą, tobulino matematikos metodus, mechanikoje sukūrė smūgio teoriją.

[10] Visi mokslai reikalingi matematikos, matematika – jokio, ji pati sau pakankama.

tai yra jauno žmogaus pratinimas skubotai ir rizikingai samprotauti, nuodugniai neištyrus ir neįsigilinus į visus mąstymą sudarančius žodžius ir idėjas, arba, o tai tas pat, tai yra jį mokyti samprotauti apie tai, ko gerai nepažino, ir iškreipti jo protą, kad jį būtų galima sutvarkyti. Dažnai tuo nedėmesingumu arba perdėtu rūpinimusi lengva samprata ir minčių tvarka apleidžiame gilinimąsi į jas, taigi apleidžiame mąstymo nuodugnumą ir nejučiomis patenkame į senosios dialektikos ir naujosios vokiečių filosofijos ydą, kur viskas sukasi apie formą, užuot gilinusis į daiktus ir nuodugnius įrodymus, kurie, išreikšti grynai ir be jokios formos, stipriau įtikina. Tad gerai yra moksluose taikyti atradimo metodą, kai jis gali būti panaudotas be žalos ir be minėtų netinkamumų, tačiau jo nedera paskirti kaip visuotinės taisyklės išdėstant mokslus.

Versta iš: *O rozumowaniu rachunkowym. Pisma rozmaite Jana Śniadeckiego, tom III zawierający listy i rozprawy w naukach.* Wilno, 1818.