Žodinių daugybos ir dalybos uždavinių sprendimo ypatumai

Vaclovas Martišius

Socialinių mokslų daktaras, docentas,
Vytauto Didžiojo universiteto
Psichologijos katedra,
Donelaičio g. 52, LT-3000 Kaunas

Živilė Balkutė

Psichologijos magistrantė,
Vytauto Didžiojo universiteto
Psichologijos katedra,
Donelaičio g. 52, LT-3000 Kaunas

Matematinių užduočių sprendimų tyrimai padeda paaiškinti, kodėl nemažai mokinių turi didelių matematikos mokymosi sunkumų ir kaip pagerinti mokymo procesą. Įvertinę matematinio mąstymo ypatumus įvairiais amžiaus tarpsniais, galėtume tiksliau suprasti, kada ir kaip reikia pradėti mokyti tą ar kitą matematikos dalyką.

Matematinio mąstymo raidos tyrimuose kai kurie autoriai pabrėžia skaičiavimo procedūrų reikšmę. Gebėjimai didėja po truputį kaupiantis įvairiems atlikimo įgūdžiams. Kiti tyrinėtojai labiau pabrėžia kognityvinę koncepcinę, t. y. sąvokų, raidą. Abu aspektai – procedūrinis ir koncepcinis – yra svarbūs matematinių sugebėjimų raidai. Blogus matematinių užduočių sprendimo rezultatus gali sąlygoti tiek procedūriniai įgūdžiai, tiek ir koncepcinio suvokimo trūkumai.

Daug lengviau nustatyti, ar mokiniui pakanka procedūrinių žinių, t. y. ar jis sugeba manipuliuoti daiktais, matematiniais simboliais, vaizdais, nei įvertinti koncepcinio žinojimo lygį. Įgyti procedūros žinių mokiniams taip pat lengviau, negu suprasti, kodėl reikia manipuliuoti duomenimis nustatyta tvarka. Pavyzdžiui, mokėjimas sudauginti daugiaženklius skaičius dar nereiškia gebėjimo suprasti, kodėl taikydami mums įprastą daugybos algoritmą gauname teisingus rezultatus. Koncepcinis žinojimas sąlygoja matematinio mąstymo lankstumą. Atlikimas tik pagal procedūras yra gana rigidiškas.

Intelekto raidai daug dėmesio skyrė J. Piaget. Jo nagrinėjamos mąstymo struktūros nėra būdingos vien tik specifinei matematinių samprotavimų sričiai. Šios abstrakčios struktūros, pavyzdžiui, grupuotės, yra žmogaus sugebėjimo protauti modeliai. Nagrinėdamas skaičiaus sąvokos formavimąsi (Крутецкий, 1968), J. Piaget kreipia dėmesį ne į vaikų gebėjimą sudėti, atimti, dauginti, dalyti, o į tas struktūras, kurios sudaro galimybę susiformuoti skaičiaus sąvokai. Jo nuomone, vaikai tol neįsisąmonins šios sąvokos, kol nesupras tiek pat elementų turinčių klasių ekvivalentiškumo ir galimybės vienus klasės elementus pakeisti kitais.

Kadangi J. Piaget užduotys skiriasi nuo sprendžiamų mokyklose, tai be specialių tyrimų negalima nustatyti, kiek aritmetikos mokymosi sunkumai yra susiję su jo nagrinėtais mąstymo ypatumais. H. Ginsburgas ir R. Russelas nustatė, kad priešoperacinės stadijos vaikai, paprastai dar negalintys suprasti tvermės principo net esant diskretiniams dydžiams, sugebėjo išspręsti kai kuriuos atimties ir sudėties uždavinius (Allardice, Ginsburg, 1983). Žinomi atvejai, kai vaikai pradeda skaičiuoti labai anksti. B. Allardice ir H. Ginsburgas daro išvadą, kad mąstymas konkrečiomis operacijomis nėra būtinas, kad vaikai išmoktų atlikti paprastas matematikos užduotis. Tačiau jokiu būdu nereikia manyti, kad J. Piaget duomenys ir matematinių užduočių atlikimo rezultatai nekoreliuoja. Priešingai, iš kai kurių tyrimų peršasi išvada, kad pradinėse klasėse yra teigiama koreliacija tarp tvermės supratimo ir matematinių užduočių sprendimo rezultatų (Allardice, Ginsburg, 1983). Reziumuodami tyrimų duomenis, B. Allardice ir H. Ginsburgas teigia, kad J. Piaget nustatytos kognityvinės struktūros siejasi tik su kai kurių matematinių užduočių atlikimu. Be to, jų nuomone, šie ryšiai gali būti skirtingi įvairiais amžiaus tarpsniais. Konkrečių operacijų supratimo stoka gali nekliudyti vystytis daugeliui matematinių sugebėjimų ankstyvajame amžiuje, bet trukdyti vyresniems vaikams suvokti sudėtingesnius matematikos dalykus. G. Groenas ir C. Kieranas taip pat nurodo, kad nėra aišku, koks ryšys tarp J. Piaget ir mokyklinės matematikos užduočių atlikimo (Lemaire *et. al.*, 1994). Jie neatmeta galimybės, kad J. Piaget užduotys yra daugelio mokyklinės matematikos užduočių esminiai komponentai. Šį faktą galima pastebėti tik įsigilinus į užduočių sprendimą. Neužtenka jas paviršutiniškai palyginti. J. Piaget irgi nenurodė, kaip susieti jo tyrimų rezultatus su mokyklose pateikiamų paprastų užduočių sprendimu. G. Groenas ir C. Kieranas pažymi, kad daugelis mokyklinės matematikos užduočių nereikalauja koncepcinio supratimo. Faktai ir taisyklės, būtini išspręsti daugeliui matematikos uždavinių, gali būti išmokti nesuprantant ir nemąstant apie tai, kodėl yra taip daroma. Tikėtina, kad dėl mokyklinės matematikos užduočių paprastumo negalima nustatyti ryšio tarp J. Piaget atrastos intelekto struktūros mokymosi rezultatų.

Nepaisant didelės painiavos klausimu, kiek J. Piaget nustatytos mąstymo savybės padeda mokytis matematikos, jo idėjos vis dar stimuliuoja tyrimus. Pateikus priešoperacinės stadijos vaikams dviejų kategorijų objektus, išdėstytus tam tikra tvarka, išaiškėjo, kad šio amžiaus vaikams sunku suprasti atitikmens 1 : 1 santykį. Jų sprendimus veikia santykinis objektų išdėstymo ilgis arba tankis. Sprendimo klaidų gali atsirasti dėl visiško santykio 1 : 1 nesupratimo arba dėl klaidinančios objektų išdėstymo erdvinių požymių įtakos. O. Frydmano ir P. Bryanto (1998) nuomone, naudodami erdvinius testus, nepakankamai įvertiname ikimokyklinio amžiaus vaikų sugebėjimą suprasti 1 : 1 santykį. Kai ketverių metų vaikams reikėjo po lygiai, t. y. santykiu 1 : 1, padalyti objektus dviem asmenims, dauguma vaikų padalijo be klaidų. Kitame tų pačių autorių tyrime buvo pateiktos sudėtingesnės užduotys. Vaikai vėl privalėjo padalyti objektus po lygiai. Kai kurie objektai buvo sujungti į grupes po du ar tris. Taigi vaikai privalėjo dalyti objektus pagal santykio 1 : n taisyklę. Dauguma penkiamečių vaikų be jokių papildomų nuorodų teisingai išsprendė šią problemą. Dar sudėtingesnė užduotis, kai objektus reikia dalyti santykiu n : m. Pats sudėtingiausias atvejis, kai nė vienas iš skaičių n ir m nesidalija iš kito. Penkerių šešerių metų vaikų rezultatai daug geresni, kai didesnis skaičius be liekanos dalijasi iš mažesniojo, nei tuo atveju, kai reikėjo ieškoti mažiausiojo bendrojo kartotinio (Frydman, Pryant, 1994).

Pradėdamas spręsti žodinius uždavinius, vaikas susiduria su naujomis problemomis. Mokiniai turi įprasti tiksliai išreikšti matematines idėjas. N. Menčinskajos ir N. Moro nuomone, iš uždavinių sprendimo proceso analizės duomenų reikia padaryti išvadą, kad visais atvejais mokinys privalo atlikti dvi pagrindines mąstymo operacijas: analizuoti ir abstrahuoti. Vaikas turi suskirstyti uždavinio sąlygą į tai, kas pateikta, ir tai, ko ieškoma, parinkti aritmetinius veiksmus, abstrahuotis nuo uždavinio sąlygos siužeto ypatumų ir išreikšti duoto ir ieškomo santykius aritmetiniais terminais. Pereinant prie dviejų veiksmų, uždavinio sprendimo parinkimo zona padidėja. Vaikui reikia pasirinkti ne tik veiksmą, bet ir porą skaičių iš kelių, nurodytų sąlygoje. Be to, jis turi išskirti tarpinį rezultatą. Tą padaryti padeda uždavinio klausimo supratimas. N. Menčinskaja ir M. Moro pabrėžia įgūdžių svarbą. Mokėjimas spręsti uždavinius – tai sugebėjimas atlikti veiksmus pagal bendras taisykles, įgytas pratybų metu, nes žinios tik po truputį tampa mokėjimais ir įgūdžiais.

Nustatyta, kad sprendžiant vieno aritmetinio veiksmo, sudėties arba atimties, reikalaujančias užduotis, jų sudėtingumas priklauso nuo žinomų ir ieškomų duomenų tipo. Pakitimo problema, kai yra žinomas pradinis ir pakitimo dydis, vaikams yra paprastesnė už pakitimo problemą, kai sąlygoje yra nurodytas pradinis ir dydis po pokyčio (Riley, Greeno, Hiller, 1983). Pailiustruokime šią mintį pavyzdžiu.

1. Simas turi 3 rutuliukus. Tomas jam davė dar penkis. Kiek rutuliukų turi Simas?

2. Simas turi 3 rutuliukus. Po to, kai Tomas jam davė keletą rutuliukų, Simas dabar turi 8 rutuliukus. Kiek rutuliukų davė Simui Tomas?

Pirmąjį uždavinį išsprendžia ir ikimokyklinio amžiaus vaikai. Daugeliui ikimokyklinio amžiaus ir pirmos klasės mokinių sunku išspręsti antrąjį. Dar sudėtingesnės pakitimo problemos, kai pateikiami pakitimo dydis ir galutinis rezultatas. Jas nelengva išspręsti antros ir trečios klasės mokiniams. Šių problemų pavyzdžiai yra 3 ir 4 sąlygos.

3. Simas turėjo keletą rutuliukų. Tomas jam davė penkis ir dabar Simas turi 8 rutuliukus. Kiek rutuliukų iš pradžių turėjo Simas?

4. Simas turėjo keletą rutuliukų. Po to, kai jis Tomui atidavė 5 rutuliukus, jam liko 3 rutuliukai. Kiek rutuliukų iš pradžių turėjo Simas?

Labai pasunkėja uždavinių sprendimas, jei jie yra formuluojami palyginimo terminais. Pavyzdžiui, vaikams sunkiau išspręsti penktą uždavinį (palyginimo) nei pirmąjį, nors abiem atvejais atliekamas tas pats sudėties veiksmas.

5. Simas turi tris rutuliukus. Tomas turi penkiais rutuliukais daugiau. Kiek rutuliukų turi Tomas?

Pateiksime dar vieną pavyzdį, iliustruojantį uždavinio sudėtingumo padidėjimą lopšelinukams, darželinukams ir pirmokams, kai užduotis suformuluojama palyginimo terminais. T. Hudsonas pateikė vaikams siužetinius paveikslėlius. Vaikams užduoti dviejų tipų klausimai. Pirmajam tipui priklausė paprasti palyginamieji klausimai, kito tipo užduotys buvo formuluojamos be palyginimo, nuodugniau interpretuojant paveikslėlių turinį. Viename paveikslėlyje vaikai matė 5 paukščius ir 4 kirmėlaites. Šiuo atveju minėtus dviejų tipų klausimus galima suformuluoti taip.

1. Kiek čia yra daugiau paukščių nei kirmėlaičių?

2. Tarkime, kad paukščiai lenktyniauja, nes kiekvienas nori pačiupti kirmėlaitę. Ar kiekvienas paukštis pačiups kirmėlaitę?... Kiek paukščių liks be kirmėlaičių?

Teisingų atsakymų, panašių į „vienu paukščiu yra daugiau nei kirmėlaičių", „vienas paukštis liks be kirmėlaitės", buvo daugiau atsakinėjant į antrojo tipo klausimus. Vaikai labai dažnai padaro vieną tipišką klaidą: jie neteisingai nurodo didesnės klasės narių skaičių. Pateikto pavyzdžio atveju vaikai dažnai atsako, kad yra penki paukščiai (Riley, Greeno, Hiller, 1983).

Iš M. Riley, J. Greeno ir J. Hiller atliktos tyrimų apžvalgos galima padaryti išvadą, kad vaikams žodinius uždavinius spręsti lengviau, jei suteikiama galimybė manipuliuoti objektais. Jaunesniame amžiuje efektas yra didesnis. Tik 22 proc. darželinukų be manipuliacijos su daiktais teisingai išsprendė antrąjį (pakeitimo) uždavinį. Leidus manipuliuoti, teisingai išsprendusių padaugėjo iki 61 procento. Be manipuliavimo tik 41 proc. pirmokų išsprendė uždavinį, o suteikus galimybę manipuliuoti – 67 procentai. Kai vaikai galėjo pasirinkti sprendimo būdą, pirmaklasiai atidavė pirmenybę sprendimui manipuliuojant objektais.

Vaikai sunkiau supranta multiplikatyvius nei adityvius santykius. T. Obrienas ir S. Casey (1983) paprašė vaikų sugalvoti žodinių uždavinių, reikalaujančių matematinio veiksmo 6 x 3 = 18. Nemaža dalis ketvirtokų (37%) ir penktokų (44%) sugalvojo sąlygas pagal adityvią taisyklę. Tokiu uždavinio pavyzdžiu gali būti ši sąlyga: „Šešios antys plaukioja prūde. Atplaukė dar trys antys. Kiek dabar iš viso yra ančių?"

Klausimą, kaip nuo adityvių santykių supratimo pereinama prie multiplikatyvių santykių suvokimo, tyrė F. Clark ir C. Kaii (1996). Vaikams parodydavo 3 skirtingo dydžio žaislines žuvis ir apie 100 plastmasinių griežinėlių. Tiriamiesiems buvo pasakyta, kad didžiausioji žuvis suėda tris, o vidurinė du kartus daugiau nei mažiausioji žuvis. Vaikams užduodavo klausimus, po kiek griežinelių jie turės duoti kitoms žuvims, jei žinoma, kiek gavo viena iš jų. Vaikai galėjo atsakyti veiksmais, ne tik žodžiu. Autorės išskyrė 4 pagrindinius multiplikatyvaus mąstymo lygius. Jų nuomone, multiplikatyvus mąstymas akivaizdžiai skiriasi nuo adityvaus. Vaikai pradeda suprasti multiplikatyvius santykius gana anksti. Su nedidele tyrinėtojų pagalba 45 proc. antros klasės mokinių teisingai išsprendė pateiktas užduotis. Tačiau multiplikatyvus mąstymas vystosi lėtai. Tik apie 49 proc. penktokų be jokios pagalbos teisingai išsprendė pateiktus uždavinius.

Pirmasis mūsų tyrimo tikslas yra nustatyti žodinių uždavinių sprendimo ypatumus, kai pateiktos užduotys yra išsprendžiamos dviem daugybos ir dalybos veiksmais, o vaikai neturi galimybės manipuliuoti daiktais. Antrasis tikslas – įvertinti, ar sprendimo klaidos skiriasi nuo tų, kurias daro jaunesni už mūsų tiriamuosius vaikai, spręsdami panašias užduotis, kai jiems yra suteikta galimybė manipuliuoti objektais (Clark, Kaii, 1996; Frydman, Bryant, 1994; Frydman, Bryant, 1998). Negalima aprioriškai tvirtinti, kad klaidų pobūdis abiem atvejais neišvengiamai turi būti skirtingas, nes yra nustatyta (Navickas, 1983; Podgoreckaja, 1980), kad ir suaugusiems žmonėms būdingi tie patys Piaget fenomenai, kai jiems tenka spręsti naujas, nežinomas problemas. Pirma ir antra uždavinių serijos yra sudarytos pagal O. Frydmano ir P. Bryanto tyrimų užduotis. Pirmos serijos uždaviniuose skaičiai parinkti taip, kad vienas iš jų būtų kartotinis. Antros serijos uždaviniuose nėra kartotinių. Trečios serijos uždaviniai panašūs į F. Clark ir C. Kaii tyrime naudotas užduotis.

Metodika

Tiriamieji. Tyrime dalyvavo 102 trijų Kauno vidurinių mokyklų trečios ir ketvirtos klasės mokiniai. Buvo tiek pat trečios ir ketvirtos klasės mokinių. Trečios klasės mokinių amžius – 8,5–11 metų, o ketvirtos klasės 9–11,5 metų. Dauguma trečiokų (92%) buvo 9–10 metų, o 88 proc. ketvirtokų buvo 10–11 metų.

Tyrimo užduotys

Pirma serija

1.1 Tėtė vienam sūnui davė 3 maišelius po 15 saldainių. Daugiau tokių maišelių neturėjo. Kiek tėtė turi duoti maišelių, kuriuose yra po 5 saldainius, kitam sūnui, kad abu gautų po lygiai?

1.2 Mama davė dukrai 4 bananų kekes po 3 bananus. Kiek kekių po 6 bananus mama turi duoti sūnui, kad abu vaikai gautų po lygiai?

1.3 Teta nusipirko 3 rinkinius po 12 šakučių. Kiek peilių rinkinių ji turi nusipirkti, kad šakučių ir peilių būtų po lygiai, jeigu peilių rinkiniuose yra po 4?

1.4 Voverė davė vienam voveriukui 10 maišelių po 4 riešutus. Kiek maišelių po 8 riešutus ji turi duoti kitam voveriukui, kad abu gautų po lygiai?

Antra serija

2.1 Tėtė vienam sūnui davė 4 maišelius po 15 saldainių. Daugiau tokių maišelių neturėjo. Kiek tėtė turi duoti maišelių, kuriuose yra po 10 saldainių, kitam sūnui, kad abu gautų po lygiai?

2.2 Mama nupirko 4 puodelių rinkinius po 9 puodelius. Kiek šaukštelių rinkinių po 6 šaukštelius ji turi nupirkti, kad puodelių ir šaukštelių būtų po lygiai?

2.3 Meška nuskynė vienam meškiukui 12 kekių po 6 serbentus. Kiek kekių po 8 serbentus ji turi nuskinti kitam meškiukui, kad abu gautų po lygiai?

2.4 Tėtė nupirko dukrai 15 paveikslėlių rinkinių po 6 paveikslėlius. Kiek rinkinių po 10 paveikslėlių jis turi nupirkti sūnui, kad abu gautų po lygiai?

Trečia serija

Pirmi du sakiniai visoms trečios serijos užduotims yra tie patys.

Gyveno trys meškos. Antra suėda 2 kartus daugiau už pirmą, o trečia – 3 kartus daugiau už pirmą.

3.1 Jeigu antra meška gaus 4 obuolius, tai po kiek obuolių gaus kitos dvi?

3.2 Jeigu trečia meška gaus 9 obuolius, tai po kiek obuolių gaus kitos dvi?

3.3 Jeigu pirma meška gaus 4 obuolius, tai po kiek obuolių gaus kitos dvi?

3.4 Jeigu pirma meška gaus 7 obuolius, tai po kiek obuolių gaus kitos dvi?

Tyrimo eiga

Užduotys buvo pateiktos individualiai. Kiekvienas vaikas sprendė po du uždavinius – vieną iš pirmos arba antros, kitą – iš trečios serijos. Kad pirmos serijos uždavinio sprendimas nepaveiktų antros serijos uždavinio sprendimo arba atvirkščiai, antros serijos užduoties sprendimas nepaveiktų pirmos serijos uždavinio sprendimo, nė vienam vaikui nebuvo pateikti abiejų serijų uždaviniai. Atspausdintos ant atskirų kortelių uždavinio sąlygos buvo pateikiamos po vieną. Paduodamas tušinukas ir lapas popieriaus, kuriuo vaikai galėjo naudotis kaip juodraščiu. Vaikams buvo pasakyta, kad jų rezultatai nebus vertinami pažymiais. Sprendžiant jokia pagalba nebuvo teikiama. Vaikui išsprendus, jo buvo prašoma paaiškinti, kaip jis sprendė. Pokalbiai įrašyti diktofonu.

Tyrimo rezultatai

Pirma ir antra serijos. Išanalizavus pirmos ir antros serijų uždavinių sprendimus, nebuvo pastebėta kokybinio sprendimų skirtumo. Todėl abiejų serijų uždavinių sprendimai suskirstyti į tiek pat (keturis) lygmenų pagal kokybę. Kiekybinio skirtumo tarp serijų taip pat nėra. Pirmos serijos užduotis teisingai išsprendė (ketvirtas lygmuo) 23 vaikai, neteisingai (pirmas, antras ir trečias lygmenys) – 28 vaikai. Antros serijos uždavinius teisingai išsprendė 24 vaikai, neteisingai 27. Kiek sprendimų priklauso kiekvienam lygmeniui, matome iš pirmos lentelės. Pirmų dviejų serijų uždaviniai pagal sprendimo efektyvumą skiriasi nereikšmingai ($\chi^2 = 0{,}039$, $p > 0{,}50$).

Pirmam sprendimų lygmeniui buvo priskirti tie mėginimai, iš kurių analizės aiškėja, kad vaikai nesupranta užduotyse nurodytų ryšių tarp objektų ir pateiktų skaičių. Sprendimų bandymai primena atsitiktinius aritmetinius veiksmus su sąlygose pateiktais skaičiais. Suprasti tų veiksmų prasmę sunku. Pačių sprendėjų nurodoma veiksmų interpretacija neteisinga. Pateiksime po du tipiškus kiekvieno lygmens pavyzdžius. Pirmu lygmeniu 2.3 užduotį sprendė ketvirtos klasės mokinė I.

1) 8 – 6 = 2 kekės.

2) 12 + 2 = 14 kekių. Aš iš 8 serbentų atėmiau 6 serbentus ir gavau du serbentus. Prie 12 pridėjau tuos du serbentus ir gavau 14.

Mergaitė nuolat painiojo kekes su serbentais, multiplikatyvius santykius pakeitė adityviais. Tam pačiam pirmam lygmeniui priskiriame ir 2.4 užduoties sprendimą. Ketvirtos klasės mokinė E. taip samprotauja.

1) Kiek paveikslėlių tėvas padalys abiem vaikams? 10 x 6 = 60 pav.

2) Kiek rinkinių nupirks tėtis savo vaikams? 60 : 15 = 4 pav. Ats: 4 paveikslai.

Paprašyta paaiškinti savo sprendimą, mokinė tęsė:

Kiek paveikslėlių tėvas padalys abiems vaikams? Mes tuos 10 paveikslėlių padauginome iš 6, gavome 60 paveikslėlių. Kiek rinkinių tėtis nupirks savo vaikams? Sužinojau 60, padalinau iš 15. Po 4 paveikslėlius padalins abiems vaikams: berniukui ir mergaitei.

*1 lentelė. **Pirmos ir antros serijų uždavinių sprendimų pasiskirstymas pagal lygmenis***

Sprendimo lygmenys	*1 serija*		*2 serija*	
	3 klasės mokiniai	*4 klasės mokiniai*	*3 klasės mokiniai*	*4 klasės mokiniai*
I	6 (23 %)	2 (8%)	6 (24%)	3 (11,5%)
II	7 (27%)	5 (20%)	4 (16%)	3 (11,5%)
III	5 (19%)	3 (12%)	7 (28%)	4 (15,5%)
IV	8 (31%)	15 (60%)	8 (32%)	16 (61,5%)

Antram lygmeniui buvo priskirti tie sprendimai, iš kurių analizės aiškėja, kad vaikas bent iš dalies supranta sąlygoje pateiktus ryšius. Būtina priskyrimo sąlyga, kad vaikas visą sprendimo laiką bandytų atsižvelgti į pagrindinę uždavinio sąlygą: „objektus reikia padalyti po lygiai". Kai kurie šio lygio sprendimai, ryšių tarp uždavinio duomenų supratimo prasme, mažai skyrėsi nuo pirmo lygmens. Vienintelis esminis skirtumas, kad vaikų veiksmus sąlygojo objektų padalijimo lygybės įsisąmoninimas. Tipiškas tokio sprendimo pavyzdys gali būti trečios klasės mokinio K. mėginimas išspręsti 2.1 uždavinį.

10 : 2 = 5 maišeliai. Ats. : 5 maišeliai. Todėl, kad tėvas dar turėjo 10 maišų saldainių, o vaikų tiktai du. Po kiek gautų, jei lygiai padalintų? Dešimt dalinant iš dviejų lygu 5.

Antram lygmeniui taip pat priskyrėme sprendimus, kuriuose pirmuoju veiksmu teisingai yra apskaičiuojamas pirmojo gavėjo visų objektų kiekis, bet antrasis veiksmas yra neteisingas. Panagrinėkime, kaip ketvirtos klasės mokinė A. sprendžia 1.1 uždavinį.

1) 3 x 15 = 45 saldainiai.

2) 45 : 2 = 22 saldainiai. Vienas – liekana. Ats. : 22 saldainiai, vienas lieka tėčiui.

Trečiam lygmeniui priskyrėme tuos atvejus, kai veiksmai yra atlikti teisingai, bet neteisingai interpretuojamas atsakymas, arba kai sprendimo pabaigoje yra atlikti papildomi, nereikalingi veiksmai. Teisingų veiksmų, bet neteisingos atsakymų interpretacijos pavyzdžiu gali būti 1.2 uždavinio sprendimas.

1) 4 x 3 = 12 bananų.

2) 12 : 6 = 2 bananai. Ats.: 2 bananai. Pirmas klausimas 4 kart 3 lygu 12. Ir gavau 12 bananų. Antras klausimas 12 : 6 ir gavau 2 bananus.

Trečiam lygmeniui taip pat priskyrėme sprendimus, kuriuose antru etapu vietoje dalybos naudojama daugyba. Parenkamas dauginamasis, kurį sudauginus su skaičiumi, nurodančiu, po kiek objektų yra antrojo gavėjo rinkiniuose, gaunamas toks pats sandaugos rezultatas, kaip ir pirmuoju veiksmu. Kad būtų aiškiau, paaiškinsime šį sprendimo būdą pavyzdžiu. Trečios klasės mokinys M. taip išsprendė 2.3 uždavinį.

1) 12 x 6 = 72. Aš nelabai suprantu, kaip padariau... Aš 12 sudauginau su 6, gavau 72. Padauginus 9 iš 8, irgi 72.

M. dar sunku paaiškinti savo sprendimą. Jeigu mokinys būtų aiškiai supratęs sprendimo prasmę, šį sprendimo būdą, kai vietoje dalybos atliekamas daugybos veiksmas, būtumėme priskyrę ketvirtam lygmeniui. Tokio tipo sprendimų buvo. Ketvirtam sprendimo lygmeniui dar priskyrėme tokius sprendimus, kuriuose yra nedidelių netikslumų, pavyzdžiui, aritmetinio veiksmo atlikimo klaidų, ir, žinoma, visus teisingus sprendimus. Ketvirto lygio su aritmetine klaida sprendimo pavyzdžiu gali būti J. darbas sprendžiant 2.4 užduotį.

1) 15 x 6 = 70

2) 70 : 10 = 7. 15 padauginau iš 6 ir gavau 70. 70 padalinau iš 10 ir gavau 7.

Aritmetinių klaidų buvo labai mažai. Apžvelgę tyrimo duomenis, galime konstatuoti, kad koncepcinis žodinių uždavinių supratimas atsilieka nuo procedūrinių žinių išmokimo.

Trečia serija. Šios serijos uždavinių sprendimai taip pat buvo priskirti kuriam nors vienam iš keturių lygmenų. Pačių lygmenų charakteristika labai panaši į jau aprašytus tipus, išskirtus nagrinėjant dviejų pirmųjų serijų rezultatus. Pirmam lygmeniui buvo priskirti sprendimai, kuriuose sunku įžvelgti nors elementarų užduotyse pateiktų skaičių ir sąvoku ryšių supratimą. Šio lygmens vaikų sprendimai primena atsitiktinę manipuliaciją skaičiais.

Antram lygiui priskirti tie sprendimai, kuriuose atsižvelgiama į užduotyse nurodytas sąlygas „du kartus daugiau", „tris kartus daugiau", tačiau neteisingai. Pateikiame du antro lygmens sprendimo pavyzdžius.

3.2. uždavinys

1) Kiek antra meška suėda obuolių? 9 x 2 = = 18 obuolių.

2) Kiek trečia meška suėda obuolių? 9 x 3 = = 27 obuolius... Reikėjo sudauginti abu kartus.

3.3. uždavinys

3 x 2 = 6; 3 x 3 = 9; 9 + 6 + 4 = 19. Visų pirma 3 padauginau iš dviejų. Gavau, kad antra meška suėdė 6 obuolius. Antra, 3 kart 3 yra devyni. Sudėjus visus obuolius sužinojau, kiek jos visos suėdė.

Klaidos gana tipiškos. Pirmasis pavyzdys iliustruoja tuos atvejus, kai vaikas daugina trečios arba antros meškos obuolius vietoj to, kad pirma suskaičiuotų pirmos meškos obuolius. Spręsdamas 3.3 užduotį, mokinys daugino ne obuolių, o meškų skaičių.

Trečiam lygmeniui buvo priskirti iš dalies teisingi sprendimai. Dažniausiai tokiuose sprendimuose vienas veiksmas yra teisingas, o kitas ne.

3.3. uždavinys

1) 4 x 3 = 12 obuolių.

2) 4 : 2 = 2 obuoliai. Pirma sužinojau, kiek gavo antra... trečia meška. Po to sužinojau, kiek suėda pirma meška. Sužinojau, kiek jos abi suėdė – pirma ir antra. Trečia suėdė 12, pirma – 2.

Teisingas tik pirmas veiksmas. Mokinys nuolat painiojasi, įvardydamas meškas. Galbūt atlikdamas antrąjį veiksmą, jis 4 obuolius priskyrė antrajai meškai, t. y. dėl nedėmesingumo ar kitų priežasčių sprendė uždavinį pagal kitą, o ne pateiktą, sąlygą.

Vaikų sprendimus priskyrėme ketvirtam lygmeniui, jei jie teisingai suprato multiplikatyvius santykius ir teisingai atliko aritmetinius veiksmus.

Pirmas ir antras trečios serijos uždaviniai vaikams buvo sunkesni už trečią ir ketvirtą. Nors visi uždaviniai išsprendžiami dviem veiksmais, tačiau pirmas ir antras sprendžiami dalybos ir daugybos, o trečias ir ketvirtas tik daugybos veiksmais. Pirmą ir antrą uždavinius teisingai išsprendė 16 mokinių, neteisingai 36 mokiniai, trečią ir ketvirtą – atitinkamai 34 ir 16 mokinių. Teisingai ir neteisingai išsprendusiųjų proporcijos abiem atvejais reikšmingai skiriasi (χ^2 = 12,69, $p < 0{,}005$). Kaip pasiskirsto trečios serijos uždavinių sprendimai pagal lygmenis trečioje ir ketvirtoje mokinių klasėse, pavaizduota 2 lentelėje.

Kaip ir tikėtasi, ketvirtos klasės mokiniai uždavinius sprendė geriau nei trečios klasės mokiniai. Visų trijų serijų duomenimis, sprendimo kokybės skirtumas yra reišmingas (χ^2 = 5,03, $p < 0{,}005$).

2 lentelė. ***Trečios serijos uždavinių sprendimų pasiskirstymas pagal lygmenis***

Sprendimo lygmenys	*1 ir 2 uždaviniai*		*3 ir 4 uždaviniai*	
	3 klasės mokiniai	*4 klasės mokiniai*	*3 klasės mokiniai*	*4 klasės mokiniai*
I	12 (46,2%)	8 (30,8%)	4 (16,0%)	3 (12,0%)
II	4 (15,4%)	7 (26,9%)	3 (12,0%)	3 (12,0%)
III	3 (11,5%)	2 (7,7%)	1 (4,0%)	2 (8,0%)
IV	7 (26,9%)	9 (34,6%)	12 (68,0%)	17 (68,0%)

Rezultatų aptarimas

Vaikai gali teisingai išspręsti uždavinius tik supratę ir atkreipę dėmesį į užduotyse pateiktus kiekybinius ryšius tarp objektų:

1. Spręsdami pirmųjų dviejų serijų uždavinius, jie pirmiausia turėjo atkreipti dėmesį, kad reikia sudaryti dvi lygias daiktų grupes. Šešiuose šių serijų uždaviniuose du gavėjai privalo gauti po tiek pat objektų, dviejose užduotyse reikia po lygiai įsigyti skirtingų daiktų. Būtina neužmiršti, kad objektai yra suskirstyti į grupes (kekes, maišelius, rinkinius) po kelis ar keliolika.

2. Sprendžiant būtina visą laiką turėti omenyje, ką reikia sužinoti ir koks yra ryšys tarp nežinomojo ir žinomų duomenų.

3. Visus įsisąmonintus loginius ryšius reikia perversti į matematinę kalbą ir nustatyti, kokie matematiniai veiksmai padės surasti tai, kas nežinoma.

4. Atlikus veiksmus, reikia teisingai interpretuoti rezultatus ir mokėti paaiškinti atsakymą.

Pirmos serijos uždavinius galima spręsti dviem būdais. Pirmu, daugybos, veiksmu galima sužinoti, kiek daiktų gavo pirmasis gavėjas arba kiek yra nupirkta tam tikros rūšies daiktų. Antru, dalybos, veiksmu apskaičiuojame, kiek maišelių, kekių turi gauti gavėjas arba kiek kitos rūšies rinkinių reikia įsigyti. Sprendžiant kitu būdu, pirmuoju, dalybos, veiksmu sužinome, kiek kartų viename maišelyje (kekėje, rinkinyje) yra daugiau daiktų nei kitame. Antruoju, daugybos, veiksmu nustatome, kiek kito tipo maišelių (kekių, rinkinių) reikia duoti kitam gavėjui arba įsigyti. Jei, pavyzdžiui, didesniame maišelyje yra tris kartus daugiau obuolių nei mažesniame, tai mažesnių maišelių reikia duoti tris kartus daugiau, kad vaikai gautų po tiek pat obuolių. Abu sprendimo būdai reikalauja tiek pat veiksmų. Šiuo atžvilgiu abu būdai lygiaverčiai. Antruoju būdu spręsti antros serijos uždavinius kiek sudėtingiau, nes daiktų santykis kekėse, maišeliuose ir t. t. nėra lygus sveikam skaičiui. Galima buvo laukti, kad šio tipo sprendimų, sprendžiant antros serijos uždavinius, bus mažiau arba iš viso nebus. Tačiau antrojo tipo sprendimų beveik nebuvo ir mėginant spręsti pirmos serijos uždavinius. Beveik visi mokiniai bandė spręsti tik pirmuoju budu, vienodai tinkančiu spręsti abiejų pirmųjų serijų uždavinius. Matyt, dėl visuotinio pirmojo sprendimo būdo taikymo, reikšmingo skirtumo tarp teisingai ir neteisingai išspręstų uždavinių proporcijų abiejose serijose nebuvo aptikta ($p > 0{,}50$).

Iš mūsų tyrimo duomenų galima padaryti išvadą, kad vaikams suprasti sąvoką „kartai" yra sunku. Iš kelių tiriamųjų, kurie bandė pirmos serijos uždavinius spręsti antruoju būdu, tik vieno G. mėginimą galima laikyti iš dalies pavykusių. Tačiau ir jis, spręsdamas 1.1 užduotį, neteisingai interpretavo dalybos ($15 : 5 = 3$) veiksmo rezultatą. Jis parašė, kad yra 3 saldainiai. Mokinys dar nesugeba aiškiai suprasti, kad šiuo veiksmu jis nustatė, kiek kartų didesniame maišelyje yra daugiau saldainių nei mažesniame. Antras jo veiksmas formaliai yra teisingas, bet interpretacija vėl neteisinga. Užuot teisingai interpretavęs veiksmo (3×3) rezultatą – 9 maišeliai, mokinys parašė 9 saldainiai. Galbūt ši klaida yra neteisingos pirmojo veiksmo interpretacijos padarinys. Atsižvelgiant į painius G. aiškinimus ir į tai, kad jis išsprendė nemažiau sudėtingą trečios serijos uždavinį, galima teigti, kad jo veiksmai nėra atsitiktiniai. Tačiau, nors aiškindamas savo sprendimą G.

vartoja žodį „kartas“, jis vis dar nesugeba jo vartoti kaip aiškiai suprantamos sąvokos. Dar du vaikai, spręsdami pirmos serijos uždavinius, kaip ir G., pirmiausia atliko dalybos veiksmą. Bet jie visiškai nesuprato šio veiksmo prasmės. Uždavinius jie sprendė vienu veiksmu. Galbūt vaikams, esantiems konkrečių operacijų stadijoje, sunku yra suprasti nedimensinius dydžius. Jie linkę šiems dydžiams priskirti pavadinimą: obuoliai, saldainiai, riešutai ir t. t.

Mūsų tyrimo rezultatai labai skiriasi nuo D. Frydmano ir P. Bryanto duomenų. Kai jaunesniems nei mūsų tiriamieji vaikams reikėjo po lygiai padalyti daiktus, kiekvienam gavėjui duodant skirtingo dydžio rinkinius, jie gerai susidorojo su užduotimi, kai vienas rinkinio daiktų skaičius buvo kito rinkinio daiktų skaičiaus kartotinis, t. y. kai užduotys atitiko mūsų pirmos serijos uždavinius. Spręsdami užduotis, analogiškas mūsų antros serijos uždaviniams, kur minėti skaičiai nėra kartotiniai, vaikai padarydavo daugiau klaidų. Kaip jau buvo minėta, mūsų tyrime vaikai negalėjo manipuliuoti realiais objektais. Spręsdami užduotis, mūsų tiriamieji nebandė įsivaizduoti ar piešinėliu atvaizduoti uždaviniuose apibūdintos dalijimo situacijos, t. y. sprendė visiškai kitaip, negu O. Frydman ir P. Bryant tiriamieji (1994, 1998). Sąmoningo siekio grįžti prie sprendimo metodų, kuriuos naudoja jaunesni vaikai, nebuvo pastebėta.

Kaip galima interpretuoti vaikų daromas klaidas? N. Menčinskaja ir M. Moro (1965) pažymi, kad bet kuriam žmogui, sprendžiančiam aritmetinius uždavinius, pravartu atsižvelgti i šias taisykles:

1. Nepradėk skaičiuoti, dėmesingai neišnagrinėjęs visų uždavinio sąlygų. Ypač įdėmiai perskaityk klausimą. Išskirk tarpusavyje susijusius duomenis.

2. Spręsdamas sunkų uždavinį, naudok įvairius būdus. Pasistenk aiškiai įsivaizduoti uždavinio sąlygoje apibūdinamą situaciją. Labai padeda piešinėliai arba schema. Atlikdamas veiksmus, visada klausk savęs, ką sužinojai šiuo veiksmu ir ar jis būtinas.

3. Baigęs spręsti, patikrink, ar gali išsamiai atsakyti į iškeltą klausimą.

Iš sprendimus aiškinančių vaikų pastabų galima padaryti išvadą, kad daug mokinių nepaisė šių ir panašių į jas taisyklių. Pavyzdžiui, vaikai nebandė įsivaizduoti situacijos ar padėti sau piešinėliais arba schemomis.

Minėtos taisyklės charakterizuoja tik sprendimo proceso planavimą. Mus labiau domino, kokie kognityviniai sunkumai iškyla mokiniams sprendžiant žodinius uždavinius. Apie šiuos sunkumus galima spręsti iš klaidų analizės duomenų. Pirmiausia panagrinėkime pirmos ir antros uždavinių serijų sprendimo klaidas.

Labai sudėtinga apibendrintai apibūdinti pirmo lygio sprendimo klaidas. Jos yra padaromos, kai mokiniai, atlikdami aritmetines operacijas su sąlygosc nurodytais skaičiais, nesugeba suprasti jų prasmės. Didesnė dalis atliktų veiksmų buvo daugyba ir dalyba. Matyt, dauguma vaikų žinojo, kad uždaviniuose pateikti santykiai yra multiplikatyvūs, tik ne visi sugebėjo juos suprasti. Dvi mergaitės, spręsdamos antros serijos uždavinius, vartojo sudėties ir atimties veiksmus. Jos painiojo multiplikatyvius santykius su adityviais.

Iš antro lygmens sprendimų klaidų galima spręsti, į ką pirmiausia pradedantys suprasti uždavinį vaikai atkreipia dėmesį. Kai kurie į šį lygį patekę vaikai, teisingai supratę, kad objektai gavėjams turi būti paskirstyti po lygiai, bando atlikti reikiamus veiksmus, tačiau neteisingai bendrą daiktų kiekį sutapatina su vieno rinkinio, maišelio daiktų skaičiumi. Kiti vaikai teisingai suskaičiuoja vieno gavėjo gautų daiktų skaičių, bet toliau nesugeba parinkti tinkamo veiksmo, kad ir kitas gautų tiek pat. Daro įvairias klaidas: daugina, dalija iš dviejų, atima arba visai ignoruoja pirmu veiksmu gautą skaičių ir todėl atlieka antrą veiksmą, visiškai nesusijusį su pirmuoju. Vaikai niekaip negali suprasti, kad apskaičiavus pirmojo gavėjo gautą daiktų kiekį, reikia padalyti iš kito gavėjo maišelio, kekės ir t. t. daiktų skaičiaus. Vaikams sunku įsisąmoninti, kad padalijus obuolius iš obuolių, bananus iš bananų, gautas nedimensinis rezultatas gali reikšti maišelių, kekių ir t. t. kiekį. Kai kurie vaikai ir antrajam gavėjui duoda tokį patį rinkinių kiekį, kokį davė pirmajam. Ši klaida dažnai pasitaikė ir D. Frydmano bei P. Bryanto tyrime (1994).

Apie dalybos veiksmo prasmės supratimo sunkumus liudija ir trečio lygio sprendimų klaidos. Kai kurie vaikai, užuot daliję, daugina. Jie mintyse daugina keletą skaičių, kol gauna tinkamą sandaugos rezultatą. Jei, pavyzdžiui, pirmu veiksmu vaikas nustatė, kad gavėjui reikia duoti 45 saldainius, tai, žinodamas saldainių kiekį viename maišelyje (tarkim, 5 saldainiai), mokinys mintyse 5 paeiliui daugina su kitais skaičiais, kol gauna 45. Antras dauginamasis 9 ($5 \times 9 = 45$) yra ieškomas atsakymas – 9 maišeliai. Kadangi skaičiai nedideli, mažai tikėtina, kad dalybos buvo vengta dėl nemokėjimo dalyti. Išvadą, kad ne operaciniai mokėjimo elementai lėmė daugybos naudojimą, patvirtina klaidos tų vaikų, kurie teisingai antruoju veiksmu padalijo, bet negalėjo teisingai interpretuoti duomenų. Jie atsakymuose vartojo žodžius saldainiai, paveikslėliai, bananai, o ne maišeliai, rinkiniai, kekės. Šio tipo klaidingų atsakymų sumažėtų, jei visi mokiniai būtų išsiugdę įgūdį vartoti jau minėtą taisyklę – visada savęs klausti, ką sužinojo kiekvienu veiksmu ir ar rezultatas yra atsakymas į iškeltą klausimą.

Nemažai tyrinėtojų pažymi, kad sėkmingai spręsti uždavinius galima tik susiformavus gebėjimui abstrahuotis nuo neesminių, percepcinių sąlygoje apibūdintos situacijos savybių. Išsireiškiant V. Kruteckio (1968) terminais, sprendimo sėkmė priklauso nuo gebėjimo formalizuotai suvokti matematinę medžiagą. Visi minėti neteisingų sprendimų tipai nurodo, kad mokiniams trūksta gebėjimo apibendrintai suprasti mąstymo uždavinio duomenų santykius, ypač nedimensinius, išreiškiamus dalybos veiksmu.

Išryškėjo dideli individualūs tos pačios klasės vaikų skirtumai. Kai kurie tos pačios klasės vaikai visiškai nesuprato uždavinių, o kai kurie išsprendė be klaidų. Tokie rezultatai sutampa su kitų autorių duomenimis. Matematinius gebėjimus tyręs V. Kruteckij (1968) pažymėjo, kad labai skiriasi to paties amžiaus vaikų matematiniai sugebėjimai. J. Piaget taip pat nurodo, kad paprastai pateikiamos intelekto stadijų ribos 2, 7, 11, 15 metų yra tik orientyrai, nes gali būti didelių individualių skirtumų.

Analizuodami trečios serijos uždavinių, sudarytų pagal F. Clark ir C. Kaii tyrime naudotą metodiką, klaidas, išskyrėme keletą jų tipų. Neretai vaikai, kurių sprendimai buvo priskirti pirmam lygiui, bandė spręsti adityviu būdu. Mokiniai nesupranta, kad uždavinio sąlygos teiginys „antra meška suėda *n* kartų daugiau už pirmąją“ reikalauja daugybos. Jie prie pirmos meškos suėstų obuolių skaičiaus prideda arba kartais net atima *n*. Antrojo tipo klaida padaroma, kai dalį vaikas sutapatina su visuma. Vaikas įsivaizduoja, kad nurodytas vienos meškos obuolių skaičius yra visuma, o kiekviena meška turi gauti tam tikrą šios visumos dalį. Pavyzdžiu gali būti 3.2 uždavinio sprendimas (9 - 2 = 7, 9 - 3 = 6).

F. Clark ir C. Kaii tyrimo metu vaikai aiškiai matė žaislines žuvis, galėjo įvertinti jų dydį. Vaikams buvo lengva atskirti žuvį, apie kurią iš sąlygos buvo žinoma, kiek drožlelių ji suėda, nuo kitų žuvų. Spręsdami žodinius uždavinius, vaikai negali pasinaudoti percepciniais situacijos požymiais. Didesni reikalavimai tenka darbinei atminčiai. Vaikai dažnai painioja, kuri meška už kurią daugiau suėda. Dėl šios žodinių uždavinių sprendimo specifikos vaikai daro daug klaidų, todėl jų sprendimai neviršija antrojo lygmens.

J. Piaget nuomone, daugyba ir sudėtis skiriasi abstrahavimo pobūdžiu ir įeities santykių, kuriuos reikia atlikti simultaniškai, kiekiu. Pavyzdžiui, atliekant sudėties 4 + 4 + 4 veiksmą vaikui pakanka suprasti, kad į junginį „keturi" įeina keturi vienetai. Junginiai integruojami nuosekliai. Abstrahavimo lygis nesikeičia. Prie junginio keturi po vieną yra pridedamas dar vienas toks pat junginys, prie rezultato 8 pridedamas dar vienas junginys keturi po vieną. Kad būtų galima sąmoningai suprasti ir atlikti daugybą, reikia vienu metu turėti mintyse įeities santykius, nusakančius, kaip sudaryti junginiai, ir įeities santykius, apibūdinančius, kaip iš šių junginių sudaroma visuma. Keturi vienetai sudaro kiekvieną junginį iš keturių, ir trys junginiai po keturis sudaro sandaugos rezultatą.

Apie nemokėjimą gerai skirti multiplikatyvių santykių nuo adityvių galima spręsti ir iš trečio lygmens sprendimų. Kartais vaikai pradeda spręsti teisingai, dalybos ir daugybos veiksmu, o užbaigia klaidingai – sudėtimi ar atimtimi. Tyrimo duomenys taip pat patvirtino nuomonę (Lemaire, Berrett, Fayol, Abdi, 1944), kad tarp aritmetinių daugybos ir dalybos veiksmų susidaro asociatyvūs ryšiai. Buvo pastebėta nemažai tokio pobūdžio klaidų: 12 x 2 = 14, 2 + 3 = 6.

Kasdieniam bendravimui tikslumas neturi didelės reikšmės. Bet sprendžiant matematikos uždavinius kiekvienas žodis, skaičius, ženklas ir jų tvarka yra svarbūs. M. MacGregor (1989) pažymėjo, kad dažnai vaikai, skaitydami uždavinio sąlygas, praleidžia, prideda arba pakeičia žodžius. Dėl tokio nedėmesingumo atsiranda sprendimo klaidų. Mūsų tyrime 10 vaikų, spręsdami pirmus du trečios serijos uždavinius, klaidingai daugino sąlygoje nurodytą obuolių skaičių, lyg jis apibūdintų, kiek pirmoji meška turėjo obuolių. Tikėtina, kad bent dalis iš taip sprendusių mokinių šią klaidą padarė dėl neatidumo.

Daugiau kaip pusė mokinių (52%) nesugebėjo teisingai išspręsti uždavinių. Užduotys nebuvo sudėtingos. Daug jaunesni nei mūsų tiriamieji, šešiamečiai vaikai, galėdami manipuliuoti daiktais, sprendė geriau (Clark, Kaii, 1996; Frydman, Bryant, 1994) už mūsų tyrime dalyvavusius 9–11 metų mokinius. Pereinant nuo sprendimų manipuliuojant objektais prie sprendimų mintyse, vis daugiau reikšmės įgauna koncepcinis matematinių gebėjimų komponentas. Tačiau vaikams sunku suvokti matematines sąvokas, ypač sunku teisingai interpretuoti objektų kiekio santykį. Jie yra linkę šį santykį tiesiog susieti su daiktų skaičiumi. Mokantis matematikos, procedūriniai įgūdžiai dažnai pralenkia koncepcinį matematinių faktų suvokimą.

LITERATŪRA

1. Allardice, B. S., Ginsburg, H. P., Psychological Diffuculties in Mathematics, H. P. Ginsburg (Ed), *The Development of Mathematical Thinking,* Academic Press, New York, 1983, p. 319–351.

2. Clark, F. B., Kaii, C., Identification of Multiplicative Thinking in Children ir grades 1–5, *Journal for Research in Mathematical Education,* 1996, vol. 27, p. 41–51.

3. Frydman, O., Bryant, P., Sharing and the Understanding of Number Equivalence by Young Children, *Cognitive Development,* 1998, vol. 3, p. 323–339.

4. Frydman, O., Bryant, P., Childrens Understanding of Multiplicative Relationships in the Construction of Quantitative Equivalence, *Journal of Experimental Child Psychology,* 1994, vol. 58, p. 489–509.

5. Groen, G., Kieran, C., In Search of Piagetian Mathematics, H. P. Ginsburg (Ed.), *The Development of Mathematical Thinking,* Academic Press, New York, 1983, p. 351–375.

6. Lemaire, P., Barrett, S. E., Fayol, M., Abdi, H., Automatic Activation of Addition and Multiplication Facts in Elementary School Children, *Journal of Experimental Child Psychology,* 1994, vol. 57, p. 224–258.

7. Lesh, R. A., Mathematical Learning Disabilities: Considerations for Identification, Diagnosis, Remediation, R. A. Lesh, M. Kantowski, D. Mierkiewicz (Ed.), *Applied Mathematical Problem Solving,* Columbus, The Ohio State University, 1980, p. 537–573.

8. MacGregor, M., Reading and Writing Mathematics, *Australian Journal of Reading,* 1989, vol. 12, p. 153–167.

9. Navickas, V., „Vaikiško“ suaugusiųjų mąstymo tyrimas, *Psichologija,* 1983, 11, p. 31–50.

10. O'Brien, T., Casey, S., Children Learning Multiplication, *School Science and Mathematics,* 1983, vol. 83, p. 246–251.

11. Riley, M. S., Greeno, J. G., Hiller, J. I. Development of children's problem solving ability in arithmetic, H. P. Ginsburg (Ed.), *The Development of Mathematical Thinking,* Academic Press, New York, 1983, p. 153–196.

12. Крутецкий, В. А. *Психология математических способностей школьников,* Москва: Просвещение, 1968.

13. Мечинская, Н. А., Моро, М. И., *Вопросы методики и психологии обучения арифметики в начальных классах,* Москва: Просвещение, 1965.

14. Пиаже, Ж., Шеманска, А. Генезис числа у ребенка, Ж. Пиаже (ред.), *Избранные психологические труды,* Москва: Просвещение, 1969, с. 233–565.

15. Подгорецкая, Н. А., *Изучение приемов логического мышления у взрослых,* Москва: Издательство Московского Университета, 1980.

SOLUTION PECULIARITIES OF SOLVING MULTIPLICATION AND DIVISION WORD PROBLEMS

Vaclovas Martišius, Živilė Balkutė

Summary

The main purpose of investigation was to evaluate the peculiarities of thinking of 9–11 years old children, when they are solving arithmetic word problems in mind without any opportunity to operate with visual aids. Problems of first two series were constructed analogical to the tasks by O. Frydman and P. Bryant.

Solving word problems our children did not try to imagine or express in drawings the situation described in a problem, i. e. they solved differently than 5–6 years old children in the investigation of O. Frydman and P. Bryant. It is possible to make a conclusion that it is particularly difficult correctly to interpret the ratio of object quantity for 9–11 years old children. They are tending to relate this dimensionless ratio with amount of things. The common multiples of the two quantities have no influence on problem solving. Some children interpret multiplicative relations additively.